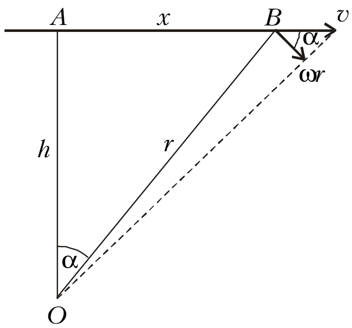

Рис.1

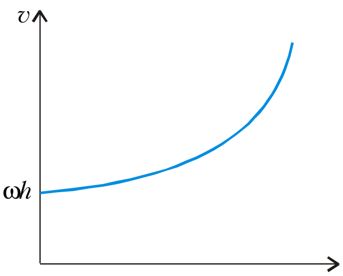

Рис.2

Нарисуем качественно график зависимости $v(x)$. Из рисунка 2 следует, что при $t \to \infty$ (т.е. при $x \to \infty$) $v \to \infty$, т.е. в мгновенной сопутствующей системе отсчета скорость зайчика может быть сколь угодно большой. Это ничему не противоречит. Дело в том, что при движении зайчика не происходит перемещения какого-либо материального объекта из одной точки стены в соседнюю: смещение зайчика вызвано приходом в соседнюю точку стены новой порции световой энергии от прожектора. Разберемся с этим подробнее.

Если прожектор, находящийся в точке O, вращается в одной плоскости, то к моменту, когда свет, испущенный в направлении точки A, достигнет точки D (рис.3,*а*), прожектор будет светить в

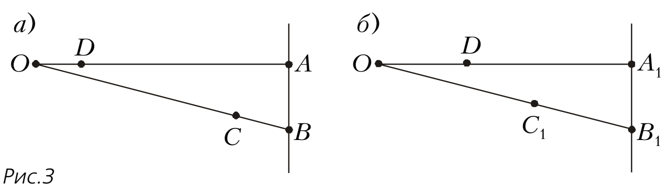

Рис.3

направлении точки B (свет распространяется, естественно, прямолинейно). Поэтому к тому моменту, когда свет дойдет из точки D в точку A, свет, испущенный позднее в направлении точки B, достигнет точки C ($DA = OC$). А еще через некоторое время свет достигнет точки B. Если стена далеко, то $AB > CB$, т.е. скорость движения зайчика больше скорости света (сравните со случаем близко расположенной стены (см. рис.3,б), когда $DA_1 = OC_1$ и $A_1B_1 < C_1B_1$).

Из-за конечности скорости распространения света c наблюдатель, находящийся в точке O, будет видеть зайчик не там, где световое пятно находится в момент наблюдения, а в другой точке – там, где зайчик находился в более ранний момент времени. Примем за ноль отсчета времени момент, когда фонарик испустил свет в направлении OA (см. рис.1). Если в момент времени t фонарик испустил свет в направлении OB (под углом $\alpha = \omega t$), то зайчик в точке B с координатой

$$x = h\,\mathrm{tg}\,\omega t \tag{1}$$

наблюдатель увидит, из-за запаздывания света, в момент времени

$$t_1 = t + \frac{2h}{c\cos\omega t}. \tag{2}$$

Для нахождения скорости зайчика воспользуемся равенством

$$v = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx/dt}{dt_1/dt}. \tag{3}$$

Поскольку

$$dx/dt = h\omega/\cos^2\omega t\,,\quad dt_1/dt = 1 + 2h\omega\sin\omega t/\left(c\cos^2\omega t\right),$$

то

$$v = \frac{ch\omega}{c\cos^2\omega t + 2h\omega\sin\omega t}. \tag{4}$$

Из выражения (4) видно, что при $t \to \pi/(2\omega)$ скорость зайчика $v \approx c/(2\sin\omega t) \to c/2$. Интересно исследовать ответ при $t < 0$ (отрицательное значение времени отвечает изменению угла α от $-\pi/2$ до $+\pi/2$). При $t \to -\pi/(2\omega)$ из выражения (4) получается странный результат: $v \to -c/2$. На первый взгляд это бессмыслица. Действительно, луч света, посланный в момент времени $t = -\pi/(2\omega)$, пойдет параллельно стене, но не достигнет ее никогда, т.е. зайчика наблюдатель никогда не увидит. Кстати, из равенства (1) следует, что при $t \to -\pi/(2\omega)$ $t_1 \to \infty$. Но ведь фонарик вращается, и рано или поздно наблюдатель должен в первый раз увидеть зайчик. Найдем этот момент времени, обозначив его t_2.

Очевидно, что t_2 – минимально возможное значение времени t_1, определяемое выражением (2). Вычислим производную dt_1/dt и приравняем ее нулю:

$$1 + \frac{2h\omega\sin\omega t}{c\cos^2\omega t} = 0. \tag{5}$$

Решая это уравнение, получаем

$$\sin\omega t = \frac{h\omega}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{h\omega}{c}\right)^2}. \tag{6}$$

Подставив это выражение в формулы (2) и (1), можно найти тот момент времени t_2, когда наблюдатель впервые увидит пятно света в точке с координатой

$$x_2 = -h\sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(c/(h\omega)\right)^2} - 1}{2}}.$$

В последующие моменты времени наблюдатель будет видеть свет, отраженный стеной как правее, так и левее этой точки, т.е. наблюдатель будет видеть два зайчика, движущихся в противоположные стороны. Другими словами, выражение (2) при $t_1 > t_2$ имеет 2 корня: каждому t_1 отвечают 2 значения t. Зависимость $t_1(t)$ качественно изображена на рисунке 4.

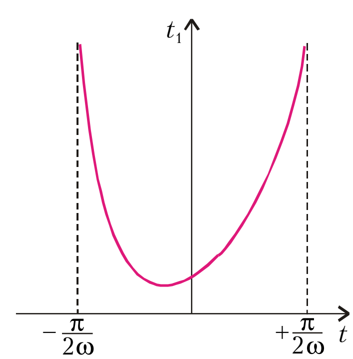

Рис.4

Подставляя равенство (5) в выражение (4), видим, что скорость обоих зайчиков в момент времени t_2 равна бесконечности! Тем самым становится понятным «нелепый» результат предельного перехода при $t \to -\pi/(2\omega)$: при $t_1 \to \infty$ зайчик, бегущий в сторону, противоположную направлению вращения фонарика, имеет скорость $v \to -c/2$.

Явно v через t_1 из уравнений (4) и (2) не выражается: зависимость $v(t_1)$ задана через параметр t. Для построения качественного графика зависимости $v(t_1)$ построим