среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест равно среднему арифметическому номеров мест, указанных в их билетах, что противоречит условию. Поэтому $m \ge 101$. Значит, если число циклов не меньше 3, то в аэробусе размещаются 303 или более пассажиров. Заметим далее, что если P_k, P_{k+1}, …, P_{k+r} – цепочка пассажиров, последовательно включенных в некоторый цикл, причем номера билетов P_k-го и P_{k+r}-го отличаются на 1, то $r \ge 101$. Рассматривая цепочку P_{k+r}, P_{k+r+1}, …, P_m, P_1,… …, P_k, получим неравенство $m-(k+r)+k \ge 101$. Следовательно, $m \ge 101 + r \ge 202$, и поэтому число мест в аэробусе может быть меньшим, чем 303, только если выполняется одно из следующих условий:

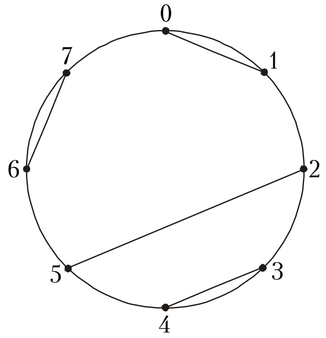
1) все пассажиры включены в один цикл;

2) число циклов равно 2, причем любые два билета на соседние (по номерам) места принадлежат пассажирам из разных циклов.

Пусть выполнено первое условие. Рассмотрим пассажиров A_n, A_{n+1} и A_{n+2} с билетами на n-е, $(n+1)$-е и $(n+2)$-е места соответственно. Между A_n-м и A_{n+1}-м пассажирами в кратчайшей из цепочек, их соединяющих, имеется не менее 100 пассажиров, между A_{n+1}-м и A_{n+2}-м также не менее 100 пассажиров, а между A_{n+2}-м и A_n-м либо нет ни одного пассажира, либо имеется не менее 100. Значит, если общее число мест меньше 303, то либо A_n сидит на $(n+2)$-м месте, либо A_{n+2} сидит на n-м месте. Ввиду произвольности номера n имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_NA_2A_4\ldots A_{N'}$, где N и N' – наибольший нечетный и наибольший четный номера соответственно, а A_i – пассажир, занимающий i-е место, $i = 1, 2, \ldots, \max(N, N')$. Пассажиры, сидящие на местах N, 2, 4,…, 198, имеют билеты на места 2, 4, 6, …, 200, а разность соответствующих средних равна $(N-200):100$. Так как эта разность больше 1, получаем $N \ge 301$. Нетрудно убедиться, что цикл $A_1A_3A_5\ldots A_{301}A_2A_4\ldots A_{300}$ удовлетворяет условиям задачи. Пусть теперь выполнено второе условие, т.е. имеются два цикла, каждый из которых включает всех пассажиров с билетами на места одной четности. Если в каком-нибудь из этих циклов пассажир A_n сидит не на $(n+2)$-м месте, а A_{n+2} – не на n-м месте, то в цикле не менее 202 пассажиров, а в аэробусе – не менее 403 мест. В противном же случае имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_N$, где пассажиры с билетами на места 1, 3, 5, …, 199 сидят на местах N, 1, 3, …, 197; разность соответствующих средних арифметических $(N-199):100$ больше 1, откуда $N \ge 301$.

С.Токарев

М1769*. *Концы 2n непересекающихся хорд разделили окружность на 4n равных дуг. Докажите, что среди этих хорд найдутся две параллельные хорды.*



Будем считать, что окружность имеет длину $4n$, а, значит, каждая из $4n$ дуг, на которые она разделена концами $2n$ непересекающихся хорд, имеет длину 1. Важно заметить следующее. Так как хорды не пересекаются, то концы каждой хорды разделяют окружность на дуги нечетной длины.

Обозначим $4n$ точек деления числами 0, 1, 2, …, $4n-1$ последовательно (см. рисунок). Условимся писать $a \equiv b$, если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на $4n$, и говорить, что a и b равны по модулю $4n$. Теперь отметим, что если i, j и k, l – две пары из чисел на окружности, для которых выполняется равенство $i + j \equiv k + l$, то хорды ij и kl параллельны.

Каждая из $2n$ хорд определена парой своих концов: (i_1, i_2), (i_3, i_4), …, (i_{4n-1}, i_{4n}). При этом сумма чисел в каждой паре нечетна.

Допустим, что среди $2n$ хорд нет параллельных. Тогда набор чисел $i_1 + i_2$, $i_3 + i_4$, …, $i_{4n-1} + i_{4n}$ по модулю $4n$ содержит все нечетные числа от 1 до $4n-1$.

Значит, сумма чисел этого набора равна $4n^2$ (по модулю $4n$). Непосредственно суммируя числа набора, мы получим

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \ldots + i_{4n-1} + i_{4n} =$$
$$= 0 + 1 + 2 + \ldots + 4n - 1 = 2n(4n-1).$$

Но тогда должно выполняться равенство $4n^2 \equiv 2n(4n-1)$. Легко видеть, что такое равенство не выполняется, т.е. остается заключить, что среди хорд есть параллельные.

В.Произволов

М1770. *Дан многочлен степени 10 с буквенными коэффициентами. Двое поочередно заменяют какую-нибудь букву на число, пока не заменят все буквы. Обозначим полученный многочлен $A(x)$. Пусть $a_1 = \max A(x)$ при x от −1 до 0, $a_2 = \max A(x)$ при x от 0 до +1. Если $a_1 > a_2$, то выиграл первый игрок, если $a_1 < a_2$, то второй. Кто победит при правильной игре?*

Результат игры в основном определяется тем, кто выберет последний коэффициент при нечетной степени. Это будет первый игрок, который может гарантировать свой непроигрыш. Говорить о выигрыше пока рано: может быть, за счет выбора коэффициентов при четных степенях второму игроку удастся добиться, чтобы $\max A(x)$ при x от −1 до +1 был бы при $x = 0$ ($a_1 = a_2$ – ничья). Однако если первый игрок сразу выберет коэффициент при первой степени равным единице, то он гарантирует, что максимума в нуле нет, так как производная не равна нулю.

Затем правильным назначением последнего коэффициента при нечетной степени (это будет достаточно большое по модулю число) первый игрок решительно склонит «чашу весов» в свою сторону. Он обеспечит себе победу независимо от возможных последующих назначений коэффициентов при четных степенях.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

Ф1778. *Человек, стоящий на большом расстоянии h от длинной ровной стены, освещает ее лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Как зависит от времени скорость светового пятна, бегущего по стене, с точки зрения этого человека? Нарисуйте график этой зависимости.*

Вначале найдем, чему равна скорость зайчика в точке B (рис.1) с точки зрения наблюдателя, находящегося в этой же точке. Из рисунка видно, что $v = \omega r/\cos\alpha$. Поскольку $\cos\alpha = h/r$,

$$v = \frac{\omega\left(h^2 + x^2\right)}{h}.$$