Знаменатель дроби в (6) равен $4-(p-2)(q-2)$. А так как знаменатель положителен, то $(p-2)(q-2) < 4$. С другой стороны, как число p сторон у грани, так и число q граней, сходящихся в вершине, не меньше 3. Поэтому нетрудно проверить, что уравнение (5) при условии $p \geq 3$, $q \geq 3$ имеет пять и только пять целочисленных решений (p,q): $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$ и $(5,3)$.

Отсюда следует, что комбинаторно различных многогранников, у которых все грани одноименные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней, не более пяти.

Вернемся теперь к правильным многогранникам. Соответствующая правильному многограннику пара чисел $(p,\ q)$ называется его символом Шлефли. Мы показали, что у правильного многогранника может быть один из пяти символов Шлефли. Проверим теперь, что для каждого из символов Шлефли существует правильный многогранник.

Легко проверить, что символу Шлефли $(3,3)$ соответствует правильный тетраэдр, а символу $(4,3)$ – куб. К многограннику с символом Шлефли $(3,4)$ – октаэдру – легко прийти от куба. Нужно взять центры квадратных граней куба – их шесть. На каждой тройке центров граней, прилегающих к каждой из 8 вершин куба, построим по правильному треугольнику (рис.7). Легко проверить, что все двугранные углы между гранями равны. Этот многогранник правильный. Он имеет восемь граней и называется *октаэдром*.

Несколько сложнее убедиться в существовании правильного многогранника, соответствующего символу $(3,5)$, т.е. многогранника с треугольными гранями, сходящимися по пять в каждой вершине. Возьмем три равных *золотых* прямоугольника, т.е. прямоугольника с соотношением сторон $\left(\sqrt{5}+1\right):2$. Расположим их во взаимно перпендикулярных плоскостях, как показано на рисунке 8. Пусть стороны золотых прямоугольников для определенности равны $\sqrt{5}+1$ и 2. Возьмем произвольную вершину A_1 одного из прямоугольников. Легко проверить, что существует в точности пять вершин этих прямоугольников, а именно вершины B_1, A_2, B_3, D_3, D_2 находящиеся от A_1 на одинаковом расстоянии 2. По теореме Пифагора легко установить, что треугольники $A_1B_1A_2$, $A_1A_2B_3$, $A_1B_3D_3$, $A_1D_3D_2$, $A_1D_2B_1$ правильные. Кроме того, нетрудно убедиться, что любые два смежных треугольника образуют равные двугранные углы. Точно такие правильные треугольники появляются во всех 12 вершинах прямоугольников, по пять в каждой. Таким образом, существует правильный многогранник, соответствующий символу $(3,5)$. Этот многогранник называется *икосаэдром*, что в переводе с греческого означает двадцатигранник (см. рис. 6). У икосаэдра 12 вершин.

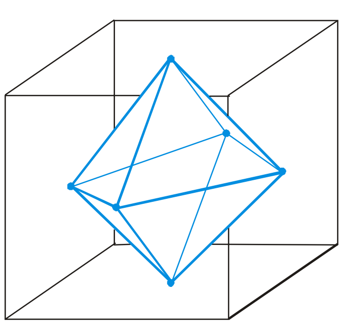

Рис.7

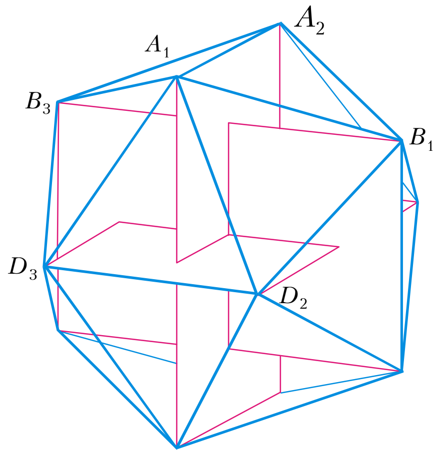

Рис.8

Чтобы построить правильный многогранник с символом $(5,3)$, возьмем в качестве вершин этого многогранника центры всех двадцати треугольных граней икосаэдра. Центры пяти треугольников, сходящихся в той или иной вершине икосаэдра, образуют вершины плоского правильного пятиугольника. Всего таких пятиугольников столько же, сколько вершин у икосаэдра – двенадцать. Эти правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине (в центре треугольной грани икосаэдра), образуют двенадцатигранник – *додекаэдр* (см. рис.6). Легко проверить, что все двугранные углы у этого додекаэдра равны. Поэтому этот многогранник является правильным.

Читатель мог заметить, что два правильных многогранника – октаэдр и додекаэдр – строились при помощи других многогранников – куба и икосаэдра. Причем каждая вершина, скажем, октаэдра соответствовала некоторой грани куба, в то время как грань октаэдра соответствовала некоторой вершине куба. Точно то же самое можно сказать и о паре многогранников икосаэдр–додекаэдр.

Два многогранника называются *дуальными*, если между множеством граней одного из них и множеством вершин другого существует взаимно однозначное соответствие, причем такое, что если две грани первого из них смежны по ребру, то соответствующие этим граням вершины второго многогранника соединяются ребром. Подчеркнем, что у пары дуальных многогранников число вершин одного равно числу граней другого, а ребер у них поровну.

В конце предыдущего параграфа мы рассматривали многогранники лишь с треугольными гранями, сходящимися в каждой вершине по шесть или пять. Дуальные к ним многогранники состоят лишь из пяти- и шестиугольников, причем в каждой вершине сходятся по три грани. Такие многогранники называются *фуллеренами*[4]. Изучение фуллеренов очень важно для приложений в химии, медицине, архитектуре. Теорема Грюнбаума в переводе на язык фуллеренов означает, что во всяком фуллерене имеется в точности двенадцать пятиугольников, а шестиугольников может быть какое угодно число, не меньшее двух.

Чрезвычайно важная задача – как перечислить всевозможные структуры фуллеренов с наперед заданным числом n шестиугольников и сколько их в зависимости от n – остается актуальной и по сей день.

[4] *Название происходит от имени знаменитого американского архитектора Р.Фуллера, который впервые начал применять такие многогранные формы, а также дуальные им для построения купольных сооружений.*