равна $\pi/2$, вершины правильного тетраэдра – π, октаэдра – $2\pi/3$.

Сумма кривизн всех вершин $\sum_{v \in M} \omega(v)$ многогранника M называется *кривизной многогранника*. Декарт доказал следующую теорему [3].

Теорема Декарта. *Кривизна* $\omega(M)$ *любого выпуклого многогранника* M *равна* 4π.

Легко проверить, что $\omega(M) = 4\pi$ для куба или правильного тетраэдра. Чтобы лучше понять, почему кривизна любого многогранника равна 4π, полезно подсчитать кривизну произвольного тетраэдра.

Значение кривизны многогранника выводится из утверждения 4) в одну строчку:

$$\omega(M) = \sum_{v \in M} \omega(v) = \sum_{v \in M} \left(2\pi - \alpha(v)\right) =$$

$$= \sum_{v \in M} 2\pi - \sum_{v \in M} \alpha(v) = B \cdot 2\pi - S = 4\pi.$$

Как отмечал Эйлер в одной из своих работ, многоугольники на плоскости можно классифицировать по числу сторон (или, что все равно, по числу вершин): треугольники, четырехугольники и т.д., в то время как аналогичный вопрос описания многогранников оказывается гораздо сложнее. Теорема Эйлера помогает немного разобраться в этом вопросе.

Например, из теоремы Эйлера нетрудно вывести, что *если все грани выпуклого многогранника суть треугольники, причем в некоторых вершинах они сходятся по шесть, а во всех остальных по пять граней, то вершин, в которых сходятся пять граней, будет ровно двенадцать.* Естественно спросить, а сколько при этом у многогранника вершин, в которых встречается шесть многоугольников. Канадский математик Бранко Грюнбаум обнаружил, что при тех же предположениях число вершин, в которых встречается шесть треугольных граней, может быть любым, кроме единицы.

Правильные многогранники и теорема Эйлера

Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках на-

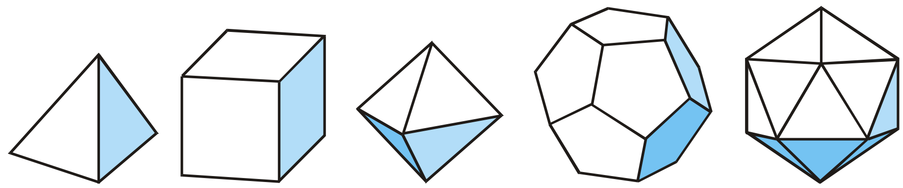

Рис.6

ходится в трактате Платона (427–347 до н.э.) «Тимаус». Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников, а всего их пять (рис.6), Платон ассоциировал с четырьмя «земными» элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с «неземным» элементом – небом (додекаэдр). Знаменитый математик и астроном Кеплер построил модель Солнечной системы как ряд последовательно вписанных и описанных правильных многогранников и сфер.

Имеется несколько эквивалентных определений правильных многогранников. Одно из них звучит так: многогранник называется правильным, если существуют три концентрические сферы, одна из которых касается всех граней многогранника, другая касается всех его ребер и третья содержит все его вершины (определение А). Это определение напоминает одно из возможных определений правильного многоугольника: многоугольник называется правильным, если он вписан в некоторую окружность и описан около другой окружности, причем эти окружности концентричны.

Мы воспользуемся другим определением: правильным многогранником называется такой выпуклый многогранник, все грани которого суть одинаковые правильные многоугольники и все двугранные углы попарно равны (определение В).

Упражнения

4. Докажите эквивалентность определений А и В.

5. Покажите, что в случае правильного многогранника требование существования лишь двух сфер, вписанной и описанной, и их концентричности недостаточно (постройте пример неправильного многогранника, для которого существуют концентрические вписанная и описанная сферы).

Обратим внимание на замечательное обстоятельство. Если правильные многоугольники существуют с любым числом сторон $n \geq 3$, то правильных многогранников (с точностью до подобия) всего пять и число граней у них равно 4, 6, 8, 12 или 20. Докажем это.

Обозначим через p число сторон у грани правильного многогранника. Так как двугранные углы равны, то все пространственные углы в правильном многограннике также равны. Поэтому в каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число граней, которое мы обозначим через q.

Используя правильность граней и равенство двугранных углов, древние греки легко получили, что для правильных многогранников пары целых чисел (p, q) могут быть лишь такими: (3, 3), (4, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 3). Однако благодаря теореме Эйлера мы можем получить те же пять пар чисел не только для правильных многоугольников, но и вообще для произвольных выпуклых многогранников, у которых каждая грань имеет одинаковое число p сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число q граней.

Действительно, так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, а каждая грань имеет ровно p ребер, то $p \cdot Г$ равно удвоенному числу ребер в многограннике: $p \cdot Г = 2P$. Поскольку каждое ребро имеет ровно два конца, а в каждой вершине сходится ровно q ребер, то $q \cdot B = 2P$. Итак, мы имеем

$$Г = \frac{2P}{p} \text{ и } B = \frac{2P}{q}. \qquad (4)$$

Подставим соотношения (4) в формулу Эйлера:

$$\frac{2P}{q} + \frac{2P}{p} = P + 2. \qquad (5)$$

Найдем P из (5):

$$P = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}. \qquad (6)$$

[3] *Вообще говоря, теорема о кривизне многогранника справедлива не только для выпуклых многогранников, но и для невыпуклых многогранников, гомеоморфных сфере.*