Решения задач М1756—М1765, Ф1773—Ф1777

М1756. *Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.*

Построим алгоритм раскраски наших чисел в два цвета. Расположим числа по убыванию. Возьмем наименьшее и окрасим его в первый цвет. Рассмотрим следующее число. Если оно делится на минимальное число первого цвета, то окрасим его в первый цвет, а иначе – во второй; получим, что минимальные числа двух цветов попарно не делят друг друга. Рассмотрим следующее число: оно делится хотя бы на одно из двух минимальных. Если ровно на одно, то, покрасив его в тот же цвет, получим предыдущую ситуацию. Если же следующее число делится на оба минимальных, то временно окрасим его в третий цвет. Если следующее число делится на минимальное число третьего цвета, то и его красим в третий цвет, и так далее, пока не встретится число, не делящееся на минимальное число третьего цвета. Рассмотрим это число и два минимальных числа первых двух цветов: новое число делится на одно из них, тогда покрасим новое число в этот цвет, а все числа третьего цвета – в другой цвет и опять получим ситуацию, когда два минимальных числа разного цвета не делят друг друга. Повторяя этот алгоритм, мы получим раскраску, требуемую в задаче.

Примечание. Данный факт является частным случаем теоремы Дилворта о частично упорядоченных множествах, которую в связи с этой задачей можно сформулировать так:

Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых n из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Тогда все числа можно покрасить в $n-1$ цвет так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

Е.Черепанов

М1757*. *Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.*

Решение задачи опирается на два вспомогательных утверждения. Первое из них представляет собой лемму Минковского.

Лемма 1. *Если выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то этот многоугольник обладает центром симметрии.*

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в том, что для каждой стороны многоугольника найдется равная и параллельная ей сторона.

Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение многоугольника удовлетворяло следующему требованию: любые его два параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону целиком.

Пусть нижняя сторона AB исходного многоугольника M горизонтальна (рис.1). Будем строить из параллелограммов нового разбиения «дорожки», начинающиеся от стороны AB так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по горизонтальной его стороне. Ясно, что последний параллелограмм каждой дорожки будет примыкать к верхней горизонтальной стороне CD многоугольника M. Одним словом, сторона CD будет параллельна стороне AB и будет иметь ту же длину.

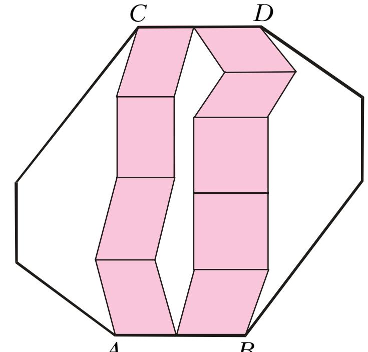


Рис.1

Теперь сформулируем и

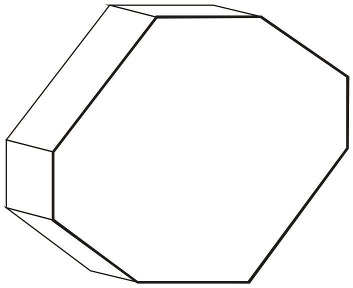


Рис.2

докажем второе вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Центрально-симметричный выпуклый $2n$-угольник можно разрезать на $\frac{n(n-1)}{2}$ параллелограммов, но нельзя разрезать на меньшее число параллелограммов.*

На рисунке 2 показано, как центрально-симметричный выпуклый $2n$-угольник можно разрезать на $n-1$ параллелограмм и центрально-симметричный выпуклый $2(n-1)$-угольник. Отсюда индуктивно вытекает первая часть утверждения.

Обоснуем вторую часть утверждения. Возьмем произвольную пару непараллельных сторон нашего $2n$-угольника – AB и KL (рис.3). При этом $2n$-угольник каким-то образом разрезан на параллелограммы. Тогда найдется дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону AB с параллельной ей стороной CD, и найдется вторая дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону KL с параллельной ей стороной EN. Эти дорожки пересекаются, т.е. имеют общий параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам AB и KL. Делаем вывод: любая пара непараллельных сторон $2n$-угольника порождает в разбиении такой параллелограмм, но подобных различных пар (а точнее – пар направлений) в точности $\frac{n(n-1)}{2}$ штук. Значит, различных параллелограммов в любом разбиении не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$ штук.

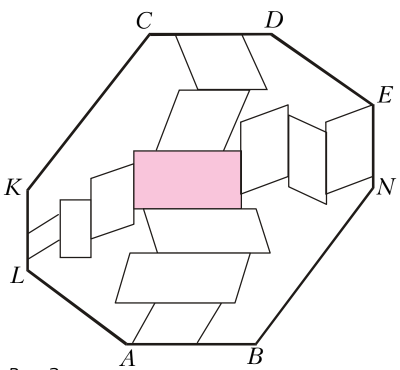


Рис.3

Артподготовка на этом закончилась; делаем заключительный залп по самой задаче. Согласно лемме 1, условием задачи задан центрально-симметричный $2n$-угольник M. Согласно лемме 2, $\frac{n(n-1)}{2} \le 20$, т.е. $n \le 6$. Иначе говоря, $2n$-угольник M имеет не более 12 сторон. Но в таком случае M можно разрезать на не более чем 15 параллелограммов, а значит, и ровно на 15. Этим все доказано.

В.Произволов

М1758. *Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.*

Всякий i-й депутат имеет свой абсолютный рейтинг R_i. В начальный момент (после избрания) каждый i-й депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг: $r_i = R_i/S$, где S – сумма всех абсолютных рейтингов данной фракции.

Обозначим через $S_i(t)$ и $S_j(t)$ суммы всех абсолютных рейтингов депутатов i-й и j-й фракций в момент t. Согласно условию переход k-го депутата (в момент t) из i-й фракции в j-ю реализуется, если и только если выполняется неравенство $R_k/S_i(t) < R_k/\left(S_j(t)+R_k\right)$, т.е. $S_i(t) > S_j(t) + R_k$, или

$$R_k + S_j(t) - S_i(t) < 0. \qquad (*)$$

Отметим, что здесь получаем $S_i(t+1) = S_i(t) - R_k$ и $S_j(t+1) = S_j(t) + R_k$.

Теперь рассмотрим функцию $L(t) = \sum S_m^2(t)$, где индекс m пробегает все номера фракций. Покажем, что при реализации перехода $L(t)$ убывает. Действительно, пусть в момент t происходит переход k-го депутата из i-й фракции в j-ю. Тогда получаем

$$L(t+1) = \left(S_i(t) - R_k\right)^2 + \left(S_j(t) + R_k\right)^2 + \sum S_n^2(t+1),$$

где n отлично от i и j. Раскрывая первые два квадрата, находим

$$L(t+1) = S_i^2(t) + S_j^2(t) + {}$$

$$+ 2R_k\left(R_k + S_j(t) - S_i(t)\right) + \sum S_n^2(t+1).$$

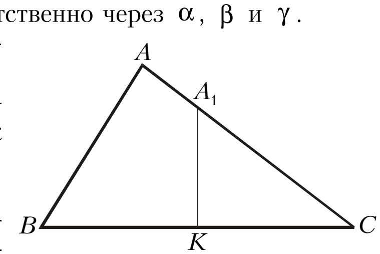
С учетом неравенства (*) устанавливаем $L(t+1) < L(t)$. Но функция L может принимать лишь конечное число значений, поэтому ее убывание не может продолжаться сколь угодно долго.

В.Ильичев

М1759. *Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной c и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше c. Докажите, что $\gamma \ge 36°$.*

Рассмотрим треугольник ABC с длинами сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, причем $a \ge b \ge c$; углы при вершинах A, B и C обозначим соответственно через α, β и γ.

Пусть точка K – середина стороны BC, точка A_1 – пересечение серединного перпендикуляра к BC и стороны AC (см. рисунок).



Из условия задачи следует, что в указанной раскраске вершины B и C должны быть разного цвета, поскольку расстояние между ними больше c (если оно равно c, то треугольник равносторонний, и для него утверждение задачи выполняется). Значит, точка A_1 должна иметь одинаковый цвет с одной из точек B или C. В любом случае должно выполняться неравенство $AB \ge A_1C$, которое равносильно следующим неравенствам:

$$c \ge \frac{a}{2\cos\gamma}; \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \ge \frac{1}{2\cos\gamma};$$

$$\sin 2\gamma \ge \sin\alpha; \quad \alpha \le 2\gamma \le \pi - \alpha.$$

Учитывая, что $2\gamma \le \beta + \gamma = \pi - \alpha$, имеем: $AB \ge A_1C \Leftrightarrow \alpha \le \le 2\gamma$.

Завершаем доказательство:

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \le 2\gamma + 2\gamma + \gamma = 5\gamma \Rightarrow \gamma \ge 36^\circ .$$

А.Эвнин

М1760. *Таблицу размером $n \times n$ клеток назовем удивительной, если она обладает следующим свойством: всякие n чисел таблицы такие, что в каждом столбце таблицы и в каждой строке таблицы присутствует ровно одно из них, дают одну и ту же сумму. Докажите, что каждая удивительная таблица может быть представлена в виде суммы двух таблиц, у одной из которых в каждом столбце все числа равны, а у другой – в каждой строке все числа равны.*

Например,

$$\begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 6, & 7, & 4 \\ 5, & 6, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 4, & 4, & 4 \\ 3, & 3, & 3 \end{pmatrix}.$$

Массовик-затейник вызывает на сцену простодушного добровольца и показывает ему таблицу

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 20 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25 \end{pmatrix}.$$

Затем предлагает добровольцу молча выбрать из таблицы 5 чисел, по одному из каждой строки и каждого столбца, а сам, не зная этих чисел, сообщает изумленному добровольцу, чему равна их сумма. Нас это не изумляет, поскольку сумма всегда будет равна 65.

Вопрос в том, как устроены удивительные таблицы. Оказывается, они устроены всегда так, как сказано в условии задачи. Докажем это.

Доказательство этого примечательного факта осуществляется на удивление просто. Пусть M – произвольная удивительная таблица размером $n \times n$. Составим таблицу P, у которой все строки будут одинаковыми и такими, какова первая строка у таблицы M. Затем, вычтя из таблицы M таблицу P, получим таблицу Q, у которой в каждой строке будут стоять одинаковые числа (например, в первой – только нули).

Последнее следует из того, что всякие четыре числа удивительной таблицы, располагающиеся «в вершинах прямоугольника»

$$\begin{array}{c} a, \ldots\ldots, b \\ \ldots\ldots\ldots\ldots , \\ c, \ldots\ldots, d \end{array}$$

подчиняются условию $a + d = c + b$.

Проделав эту процедуру с примером из формулировки задачи, получаем равенство

$$\begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 6, & 7, & 4 \\ 5, & 6, & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 3, & 4, & 1 \\ 3, & 4, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 3, & 3, & 3 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}.$$

Доказанные здесь утверждения принадлежат к тем фактам, которые просто доказать, но непросто обнаружить.

В.Произволов

М1761. *У фокусника 100 карточек, занумерованных числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика – красный, белый и синий – так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка.*

Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вынутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались.

Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался? (Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

Ответ. 12.

Пусть карточка 1 (или число 1) лежит в красном ящике (сокращенно КЯ), а карточка с наименьшим числом k, не лежащая в КЯ, лежит в белом ящике (БЯ). Тогда $k - 1$ находится в КЯ.

По условию, в синем ящике (СЯ) есть хотя бы одна карточка; пусть n – наименьшее число (т.е. карточка с наименьшим числом) в СЯ $\Rightarrow n > k$. Если $n - 1$ лежит в КЯ, то зритель может вытащить либо $n - 1$ и k из КЯ и БЯ, либо n и $k - 1$ из СЯ и КЯ. Суммы чисел на карточках одинаковы, значит, в этом случае фокус не удастся. Следовательно, $n - 1$ находится в БЯ.

Предположим, что карточка 2 лежит в КЯ. Тогда взяв либо 2 и $n - 1$ из КЯ и БЯ, либо 1 и n из КЯ и СЯ, получим одинаковые суммы, значит, $k = 2$ и 2 находится в БЯ.

Рассмотрим два случая.

1) В КЯ нет других карточек, кроме 1. Покажем, что тогда $n = 100$. Пусть $n < 100$. Тогда $n + 1$ лежит либо в БЯ, либо в СЯ. Пары карточек $(1, n+1)$ и $(2, n)$ с одинаковой суммой находятся в (КЯ, БЯ (СЯ)) и в (БЯ, СЯ) – фокус не удался. Значит, $n = 100$, т.е. в СЯ только одна карточка 100, в КЯ – одна карточка 1, в БЯ – карточки 2, 3, …, 99. Покажем, что в этом случае фокус всегда удается: если мы берем карточки из БЯ и КЯ, то получаем суммы 3, 4, … …, 100, если из КЯ и СЯ – сумму 101, если из БЯ и СЯ – суммы 102, 103, …, 199, т.е. суммы различны.

2) В КЯ есть другие числа, и m – наименьшее из них. Тогда $m > 2$, значит, $m - 1$ не лежит в КЯ. Если $m - 1$ находятся в БЯ, то для пар $(m-1, n)$ из БЯ и СЯ и $(n-1, m)$ из БЯ и СЯ фокус не удастся. Значит, $m - 1$ лежит в СЯ.

Лемма 1. Если в двух различных ящиках лежат карточки x и $x + 1$, а в третьем y и $y + 1$, то фокус не удастся.

Доказательство. Одинаковые суммы имеют пары $(x, y+1)$ и $(x+1, y)$ из разных пар ящиков.

Лемма 2. Если в одном ящике лежат карточки x и y, а в двух других $x + 1$ и $y + 1$ соответственно, то фокус не удастся.

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 1.

Выше мы показали, что для каждой пары ящиков есть карточки с двумя последовательными числами, а именно

КЯ, БЯ : 1, 2,

БЯ, СЯ : $n - 1$, n,

СЯ, БЯ : $m - 1$, m.

Значит, по лемме 1 ни в одном из ящиков нет карточек с двумя последовательными числами.

Далее, полагая, что $y = 1$, если x лежит в КЯ и $x + 1$ – в СЯ, и $y = n - 1$, если x находится в БЯ и $x + 1$ – в КЯ, по лемме 2 получаем, что в этих случаях фокус не удастся. Аналогично фокус не удастся, если x лежит в СЯ, а $x + 1$ в БЯ. Итак, если a находится в КЯ, то $a + 1$ – в БЯ, $a + 2$ – в СЯ, $a + 3$ – в БЯ и т.д. Значит, в КЯ находятся числа, сравнимые с 1 по модулю 3, в БЯ – сравнимые с 2, в СЯ – делящиеся на 3. Покажем, что такое расположение карточек подходит: сумма чисел на карточках из КЯ и БЯ делится на 3, из КЯ и СЯ сравнима с 1 по модулю 3, из СЯ и БЯ – с 2, т.е. всегда можно определить, из каких ящиков взяты карточки.

Мы получили, что если карточка 1 лежит в КЯ, а карточка с наименьшим числом не из КЯ находится в БЯ, то есть два варианта раскладывания карточек. Аналогично рассуждаем в случае других пяти пар ящиков. Значит, всего имеется $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ различных способов.

Н.Агаханов, А.Гайфуллин

М1762. *Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?*

Докажем по индукции, что для любого натурального k существует натуральное n_k, имеющее k различных простых делителей, делящееся на 3 и такое, что $2^{n_k}+1$ делится на n_k.

Для $k = 1$ можно взять $n = 3$. Пусть число $n_k = n$, кратное 3, имеет k различных простых делителей, причем 2^n+1 делится на n.

Число $2^{3n}+1=\left(2^n+1\right)\left(2^{2n}-2^n+1\right)$ делится на $3n$. Это следует из того, что 2^n+1 делится на n, а

$$2^{2n}-2^n+1=\left(2^n-2\right)\left(2^n+1\right)+3 \qquad (*)$$

делится на 3 (поскольку при нечетном n числа 2^n+1 и 2^n-2 делятся на 3).

Далее, число $2^{2n}-2^n+1$ не делится на 9, поскольку на 9 делится произведение $\left(2^n-2\right)\left(2^n+1\right)$. Значит, поскольку $2^{2n}-2^n+1>3$ при $n > 1$, то это число имеет при $n > 1$ простой делитель $p > 3$. Так как НОД $\left(2^n+1, 2^{2n}-2^n+1\right)=3$ (это тоже ясно из равенства $(*)$), то p – не делитель n.

Из сказанного следует, что число $3pn$ имеет $k + 1$ простой делитель, причем $2^{3pn}+1$ делится на $3pn$. Последнее следует, например, из равенства

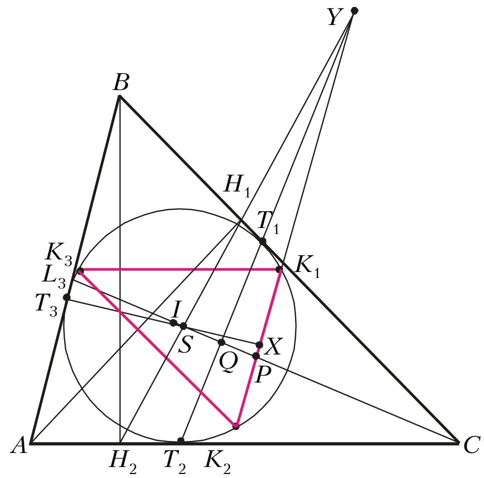
$$\left(2^{3n}\right)^p+1=\left(2^{3n}+1\right)\left(\left(2^{3n}\right)^{p-1}-\left(2^{3n}\right)^{p-2}+\ldots+1\right).$$

Для завершения решения достаточно положить $n_{k+1}=3pn=3pn_k$.

А.Егоров, В.Сендеров

М1763. *Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2, l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симметрии относительно прямых T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 соответственно.*

Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник ABC.



1. Будем обозначать через $\measuredangle(l, m)$ направленный угол между прямыми l и m.

Пусть $\measuredangle(AC, AB) = \alpha$, $\measuredangle(AB, BC) = \beta$, $\measuredangle(BC, CA) = \gamma$, тогда (см. рисунок)

$$\measuredangle(H_1H_2, AC) = -\beta \text{ (так как } \Delta H_1CH_2 \sim \Delta ACB\text{)},$$

$$\measuredangle(T_1T_2, AC) = \frac{-\alpha-\beta}{2} \text{ (так как } CT_1 = CT_2\text{)},$$

$$\text{значит, } \measuredangle(H_1H_2, T_1T_2) = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2. Рассмотрим гомотетию с отрицательным коэффициентом, переводящую описанную окружность треугольника ABC во вписанную. Пусть $K_1K_2K_3$ – образ ABC при этой гомотетии, тогда стороны треугольника $K_1K_2K_3$ параллельны сторонам треугольника ABC, значит,

$$\measuredangle(K_1K_2, T_1T_2) = \measuredangle(AB, T_1T_2) = \measuredangle(AB, AC) + \measuredangle(AC, T_1T_2) =$$
$$= -\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2} = -\measuredangle(H_1H_2, T_1T_2).$$

Проведем AL_1, BL_2, CL_3 – биссектрисы треугольника ABC, тогда $CL_3 \perp T_1T_2$ и $\measuredangle(K_1K_2, CL_3) = -\measuredangle(H_1H_2, CL_3)$. Пусть $CL_3 = l_C$, P, Q, S – точки пересечения CL_3 с K_1K_2, T_1T_2 и H_1H_2 соответственно, I – центр вписанной окружности треугольника ABC, r – ее радиус. Вычислим длины отрезков CP, CQ и CS.

3. $\Delta H_1CH_2 \sim \Delta ACB \Rightarrow CS = l_C \cdot \frac{CH_1}{CA} = l_C\cos\gamma$, но

$$IL_3 = \frac{r}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}, \text{ так как } \angle L_3IT_3 = \frac{|\beta-\alpha|}{2},$$

значит,

$$l_C = r\left(\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\right),$$

тогда

$$CS = r\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\right).$$

4. $\angle T_1CI = \frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle T_1IQ = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, значит,

$$T_1Q = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = r\cos\frac{\gamma}{2},$$

откуда

$$CQ = T_1Q\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = r\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

5. Пусть $IX \perp K_1K_2$, $X \in K_1K_2$. Тогда

$$\angle K_1IK_2 = 2\angle K_1K_3K_2 = 2\gamma \Rightarrow \angle K_1IX = \gamma,$$

стало быть,

$$IX = r\cos\gamma.$$

Но

$$\angle XIP = \angle L_3IT_3 = \frac{|\beta-\alpha|}{2},$$

поэтому

$$IP = \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

и из равенства

$$CI = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

следует, что

$$CP = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

6. Докажем, что $CP + CS = 2CQ$, т.е. что Q – середина отрезка SP. Имеем:

$$CP + CS = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}} + \frac{r\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{r\cos\alpha}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}(1+\cos\gamma) = \frac{2r\cos\alpha^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = 2CQ.$$

Значит, T_1T_2– серединный перпендикуляр к отрезку SP. Продлим K_1K_2 и H_1H_2 до пересечения в точке Y. Мы доказали, что $\measuredangle(H_1H_2, SP) = \measuredangle(SP, K_1K_2)$, значит, треугольник SYP – равнобедренный, поэтому прямые H_1H_2 и K_1K_2 симметричны относительно YQ, т.е. относительно T_1T_2. Это означает, что K_1K_2 совпадает с прямой l_3. Аналогично, l_1 и l_2 – это прямые K_2K_3 и K_1K_3, следовательно, треугольник, составленный из прямых l_1, l_2, l_3, – это $K_1K_2K_3$. Его вершины лежат на вписанной в треугольник ABC окружности, что и требовалось доказать.

Т.Емельянова, А.Гайфуллин, Д.Терешин

М1764. *Пусть функция* $f:[0;1] \to \boldsymbol{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $f(0) = 0$, $f(1) > 0$, *f монотонно возрастает на* $[0;1]$ *и для любых* x_1, $x_2 \in [0;1]$, *для которых* $x_1 + x_2 \in [0;1]$, *выполняется неравенство*

$$f(x_1) + f(x_2) \ge f(x_1 + x_2).$$

Докажите, что тогда последовательность чисел

$$s_n = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right),\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

не ограничена.

Так как для любого $k \in \boldsymbol{N}$ имеем

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \ge k\cdot\frac{1}{2k} = \frac{1}{2},$$

то, как известно, последовательность чисел $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не ограничена сверху (т.е. $a_n \to \infty$).

Задача будет решена, если мы докажем, что существует $c > 0$ со следующим свойством: $s_n \ge c \cdot a_n$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Для достижения этого достаточно показать, что для всех $x \in (0;1]$

$$f(x) \ge \frac{f(1)}{2}x. \qquad (*)$$

Приведем доказательство неравенства $(*)$.

Для всех $x \in [1/2;1]$ имеем $x \le 1 \le 2x$. Тогда, применяя свойства f, получаем

$$f(1) \le f(2x) = f(x+x) \le f(x) + f(x) = 2f(x),$$

откуда, с учетом $0 \le x \le 1$, следует неравенство $(*)$.

Далее можно применить математическую индукцию. Пусть неравенство $(*)$ выполняется для любого $x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Тогда при $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n}\right]$ имеем $2x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. В силу предположения тогда $f(2) \ge \frac{f(1)}{2}(2x)$. С другой стороны, как уже отмечено выше, $2f(x) \ge f(2x)$. Потому имеем $2f(x) \ge \frac{f(1)}{2}(2x)$, что равносильно неравенству $(*)$. Поскольку любой $x \in (0;1]$ находится в некотором отрезке вида $\left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, то неравенство $(*)$ доказано и задача решена.

В.Попов

М1765. *Длина ребра правильного тетраэдра равна 1.*
а) На ребрах тетраэдра отмечены 5 точек.
б) На поверхности тетраэдра отмечены 9 точек.
в) В тетраэдре отмечены 9 точек.*
Докажите, что в каждом случае найдутся две отмеченные точки, расстояние между которыми не превосходит 0,5.

а) Три полуребра, выходящих из какой-либо вершины тетраэдра $ABCD$, назовем репером. Таким образом, каркас тетраэдра (т.е. объединение его ребер) состоит из четырех реперов. Так как отмеченных точек пять, то найдутся две из них M и N, которые принадлежат одному реперу. Остается заметить, что диаметр репера равен 0,5, а, значит, $MN \le 0{,}5$.

б) Средние линии разделяют каждую грань тетраэдра $ABCD$ на четыре треугольника. Треугольник, ограниченный средними линиями, в каждой грани оставляем белым, а объединение четырех таких треугольников называем множеством S. Все угловые треугольники (их 12) закрашиваем в черный цвет, а их объединение называем множеством T. Если 5 или более из 9 отмеченных точек попали в белое множество S, то среди них найдутся две, которые попадут в один из четырех белых треугольников.

Ясно, что расстояние между этими двумя точками не превосходит 0,5.

Если же множеству S принадлежит не более четырех отмеченных точек, то множеству T принадлежит 5 или более отмеченных точек. Воспользуемся тем, что множество T является объединением четырех подмножеств, каждое из которых в свою очередь является объединением трех черных треугольников с общей вершиной (вершиной тетраэдра). В одном из этих подмножеств найдутся две отмеченные точки. Расстояние между ними не больше 0,5, так как диаметр подмножества равен 0,5.

в) Представим тетраэдр $ABCD$ как объединение четырех правильных тетраэдров с длиной ребра 0,5 у каждого и правильного октаэдра Q (тоже с длиной ребра 0,5).

Если четырем тетраэдрам вместе принадлежат 5 или более отмеченных точек, то, рассуждая как в предыдущем пункте, мы обнаружим, что найдутся две среди них с расстоянием не более 0,5.

Таким образом, все свелось к рассмотрению случая, когда 5 (или более) отмеченных точек принадлежат октаэдру Q. Разрежем октаэдр Q на четыре многогранника, диаметр каждого из которых будет равен длине ребра октаэдра, т.е. 0,5. И дальше все получится... Но только я это написал, как тут же спохватился: ведь разрезать октаэдр таким образом я не умею! Более того, я не уверен, что это возможно.

Тогда, как «нормальному герою», мне придется идти в обход.

Опишем около октаэдра Q сферу, спроектируем на ее поверхность из ее центра 5 отмеченных в Q точек – получим точки X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5. Нам достаточно доказать, что среди пяти проектирующих лучей найдутся два, угол между которыми не превосходит 90°.

Проведем три большие попарно перпендикулярные окружности l_1, l_2 и l_3 на сфере так, чтобы l_1 и l_2 пересекались в точке X_1 и чтобы точка X_2 принадлежала окружности l_1. Три окружности разделили сферу на 8 сферических треугольников. Нужно убедиться, что найдутся две отмеченные точки, принадлежащие одному из них. Мы видим, что остались только два сферических треугольника, которым не принадлежат ни X_1, ни X_2. Но тогда им принадлежат три точки X_3, X_4 и X_5. При всех вариантах в один из треугольников попадают две точки.

В.Произволов

Ф1773. *На тонкий горизонтальный стержень насажена цилиндрическая шайба диаметром D и толщиной l, дырка по оси шайбы имеет диаметр чуть больше, чем диаметр стержня (рис.1). К краю шайбы приложена сила $\vec{F}$, параллельная стержню. При каком коэффициенте трения шайбы о стержень движение шайбы будет равномерным? Сила тяжести отсутствует!*

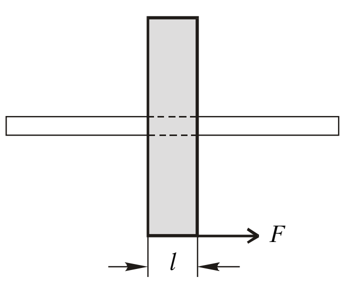


Рис.1

При воздействии силы $\vec{F}$ на шайбу она будет немного перекошена – на рисунке 2 перекос показан сильно преувеличенным. Контакт шайбы со стержнем получается в двух точках – A и $Б$. Силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ должны уравновешивать друг друга:

$$N_1 = N_2 = N .$$

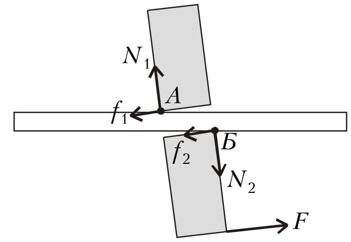


Рис.2

Силы трения $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ в сумме компенсируют $\vec{F}$ (движение шайбы по условию равномерное):

$$f_1 + f_2 = F .$$

Проскальзывание есть, так что

$$f_1 = f_2 = f = \mu N .$$

Запишем еще условие для моментов сил (можно для аккуратности перейти в движущуюся вместе с шайбой инерциальную систему отсчета). Удобно рассматривать моменты сил относительно точки A – из-за малого диаметра стержня можно не учитывать момент силы $\vec{f}_2$:

$$N_2 l - F\frac{D}{2} = 0 \text{, откуда } N = N_2 = F\frac{D}{2l} .$$

Окончательно найдем

$$2\mu F\frac{D}{2l} = F \text{, и } \mu = \frac{l}{D} .$$

А.Зильберман

Ф1774. *Легкий жесткий стержень подвешен горизонтально за концы при помощи двух легких нитей, вытянутых по вертикали (рис.1). На стержень насажены два груза массами M и 2M, расположенных симметрично на равных расстояниях друг от друга и от концов стержня. Нить со стороны тяжелого груза пережигают. Во сколько раз изменится сила натяжения оставшейся нити сразу после этого? Считайте, что за интересующий нас короткий временной интервал стержень не успевает заметно сдвинуться.*

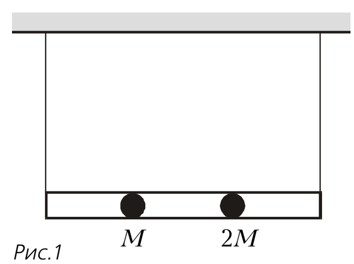


Рис.1

Выберем для расчетов малый интервал времени τ – такой малый, что стержень после пережигания нити смещается из начального положения очень мало. Тогда можно считать, что точка A (рис.2) практически неподвижна, а стержень поворачивается вокруг точки A. До пережигания нити сила T_1 находится из уравнения моментов (удобно считать моменты сил относительно точки $Б$):

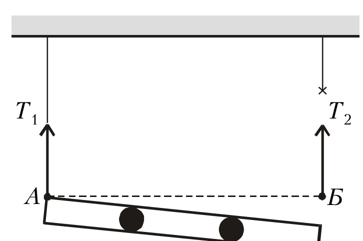


Рис.2

$$2Mg\frac{l}{3} + Mg\frac{2l}{3} - T_1 l = 0 \text{, и } T_1 = \frac{4}{3}Mg .$$

Для определения силы T_1^*, сразу после пережигания, найдем ускорение центра масс системы $a_ц$ и воспользуемся уравнением второго закона Ньютона

$$3Mg - T_1^* = 3Ma_ц .$$

Обозначим ускорение легкого груза a, тогда тяжелый груз имеет ускорение $2a$. За время τ первый груз опустится на $a\tau^2/2$, второй – на $2a\tau^2/2$, и потенциальная энергия системы уменьшится на

$$\Delta E_p = Mg\frac{a\tau^2}{2} + 2Mg\frac{2a\tau^2}{2}.$$

В рассматриваемый момент времени скорость малого груза равна $a\tau$, большого $2a\tau$, а суммарная кинетическая энергия составляет

$$E_k = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{2M(2a\tau)^2}{2}.$$

Приравняв ΔE_p и E_k, получим

$$a = \frac{5}{9}g \text{ и } a_{ц} = \frac{5}{3}a = \frac{25}{27}g.$$

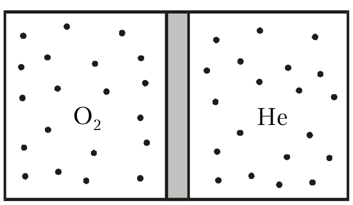
Тогда

$$T_1^* = 3Mg - 3Ma_{ц} = \frac{2}{9}Mg.$$

Итак, сила натяжения оставшейся нити уменьшится в 6 раз.

Р.Старов

Ф1775. *Тонкостенный горизонтальный цилиндрический медный сосуд разделен пополам массивным нетеплопроводящим поршнем (см. рисунок). С одной стороны от поршня находится разреженный кислород, с другой – гелий. Если сместить поршень немного из положения равновесия и отпустить, он будет совершать колебания. Во сколько раз может измениться период этих колебаний, если теплоизолировать сосуд от окружающей среды? Сосуд закреплен и двигаться не может.*



В первом случае будем считать, что через тонкие стенки сосуда легко проникает тепло – в этом случае температуру газов в любой момент можно считать равной внешней температуре, т.е. $T = \text{const}$. Обозначим длину сосуда $2l$, малое смещение поршня x. Тогда для каждой половины сосуда запишем

$$p_0V_0 = (p_0 + \Delta p)(V_0 - \Delta V),$$

или

$$p_0Sl = (p_0 + \Delta p)S(l - x),$$

где S – площадь сечения сосуда. Отсюда

$$\Delta p = p_0\frac{x}{l}$$

(мы пренебрегли произведением малых величин x и Δp). Если в одной половине сосуда давление увеличивается на Δp, то в другой оно уменьшается на такую же величину. Возвращающая сила, действующая на поршень, равна

$$F = -2\Delta pS = -2p_0\frac{S}{l}x = Mx'',$$

отсюда для частоты колебаний поршня массой M получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2p_0S}{lM}}.$$

В случае хорошей теплоизоляции температура при колебаниях изменяется, при этом силы, действующие на поршень, также изменяются. Пусть объем гелия уменьшился при смещении поршня на $xS \ll lS$, а давление увеличилось на Δp_1. Используем первое начало термодинамики:

$$A + \Delta U = 0, \text{ или } -p_0Sx + \frac{3}{2}\nu R\Delta T = 0,$$

и уравнение состояния газа:

$$pV = \nu RT, \text{ или } \nu R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p_1 = -p_0Sx + Sl\Delta p_1.$$

Отсюда получим

$$-p_0Sx + \frac{3}{2}(-p_0Sx + Sl\Delta p_1) = 0,$$

или

$$\Delta p_1 = \frac{5}{3}p_0\frac{x}{l}.$$

Давление кислорода уменьшается, но для его нахождения нужно учесть, что это двухатомный газ, тогда

$$\Delta p_2 = -\frac{7}{5}p_0\frac{x}{l}.$$

Разность давлений создает возвращающую силу

$$F = -\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{5}\right)p_0\frac{x}{l}S = -\frac{46}{15}\frac{p_0S}{l}x.$$

Следовательно, новая частота колебаний равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{46}{15}\frac{p_0S}{lM}},$$

а отношение частот составляет

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{23}{15}} \approx 1{,}24.$$

Очевидно, что период колебаний уменьшится во столько же раз.

А.Диабатов

Ф1776. *Маленький проводящий незаряженный шарик находится на большом расстоянии от точечного заряда Q. Во сколько раз изменится сила, действующая на шарик со стороны заряда, если расстояние между ними увеличить в два раза? Во сколько раз нужно будет увеличить диаметр шарика, чтобы вернуть силу взаимодействия к прежнему значению? Подсказка: помещенный в однородное (или почти однородное) поле проводящий незаряженный шарик похож на маленький диполь (маленький – по сравнению с диаметром шарика).*

На большом расстоянии от заряда Q его поле в пределах объема маленького шарика можно считать однородным; в этом поле разность потенциалов между диаметрально противоположными точками шарика A и $Б$ (рис.1) равна

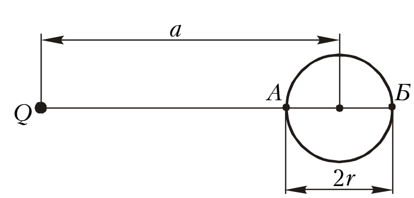


Рис.1

$$\Delta\varphi_{AБ} = k\frac{Q}{a^2}\cdot 2r.$$

Шарик проводящий, поэтому результирующая разность

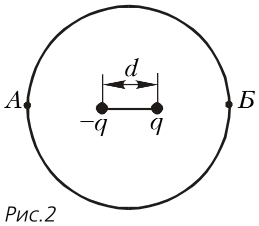


Рис.2

потенциалов между этими точками должна обратиться в ноль. Воспользуемся подсказкой – заменим индуцированные на шарике заряды диполем с зарядами $-q$ и q на расстоянии $d \ll r$ друг от друга (рис.2). В почти однородном поле этот диполь находится практически в центре шарика. В поле диполя потенциалы точек A и $Б$ равны

$$\varphi_A = k\frac{-q}{r-d/2} + k\frac{q}{r+d/2} \text{ и } \varphi_Б = k\frac{q}{r-d/2} + k\frac{-q}{r+d/2},$$

а

$$\Delta\varphi_{БA} = 2k\frac{qd}{r^2}.$$

Тогда

$$2k\frac{qd}{r^2} = 2k\frac{Qr}{a^2},$$

откуда

$$qd = Q\frac{r^3}{a^2}.$$

На диполь действует сила

$$F = -k\frac{Qq}{(a-d/2)^2} + k\frac{Qq}{(a+d/2)^2} =$$

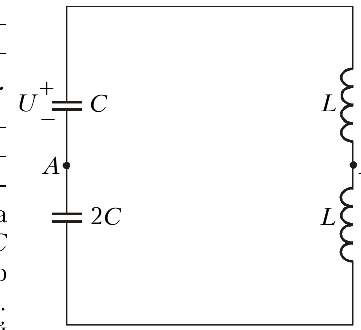
$$= -k\frac{Qq}{\left(a^2-d^2/4\right)^2}\cdot 2ad \approx -2k\frac{Qqd}{a^3} = -2k\frac{Q^2r^3}{a^5}.$$

Знак «минус» означает притяжение. Видно, что при увеличении a вдвое сила уменьшится в 32 раза.

Для компенсации уменьшения силы r^3 должно увеличиться в 32 раза. Для этого радиус шарика нужно увеличить в $\sqrt[3]{32} \approx 3{,}17$ раза.

А.Повторов

Ф1777. *Из двух конденсаторов с емкостями C и 2C и двух одинаковых катушек с индуктивностью L собрана схема, показанная на рисунке. Конденсатор емкостью C вначале заряжен до напряжения U. Дождемся момента, когда этот конденсатор окажется полностью разряженным, и соединим точки A и Б проводящей перемычкой. Найдите максимальный ток через перемычку. Элементы цепи можно считать идеальными.*



В тот момент, когда конденсатор емкостью C окажется полностью разряженным, напряжение на конденсаторе емкостью $2C$ станет равным $0{,}5U$ (по цепи протек заряд CU). Найдем ток I, текущий через катушки в этот момент, из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{2C(0{,}5U)^2}{2} + 2\frac{LI^2}{2}, \text{ и } I = \frac{U}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После соединения перемычкой точек A и $Б$ получаются два независимых контура: верхний $L - C$ и нижний $L - 2C$. Амплитуда тока верхнего контура равна I, а амплитуду тока в нижнем контуре I^* найдем из закона сохранения энергии в нем:

$$\frac{2C(0{,}5U)^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{LI^{*2}}{2}, \text{ и } I^* = \frac{U}{2}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Ток через перемычку $AБ$ равен разности токов контуров – разумеется, с учетом постоянно меняющейся разности фаз. Частоты отличаются в $\sqrt{2}$ раз – обязательно наступит такой момент, в который токи «удачно» вычитаются и получается максимальное значение, равное сумме амплитуд:

$$I_{AБ} = I + I^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}U\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

З.Рафаилов