LXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Решите ребус: $AX \cdot УX = 2001$.

А.Блинков

2. Офеня [1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

А.Саблин

3. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило на 41 чашку чая, а Инне – на 58 чашек. Сколько пакетиков было в коробке?

А.Спивак, И.Ященко

4. Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

А.Митягин

5. Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4 снежка. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Клепцын

6. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить а) 26; б) 28 клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

И.Акулич

[1] *Продавец в разнос, коробейник.*

7 класс

1. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

С.Маркелов

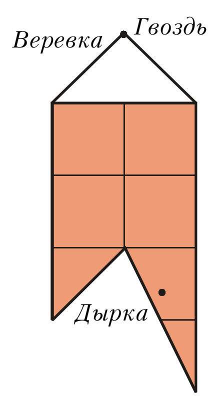
2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

И.Ященко

3. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, а на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

Т.Голенищева-Кутузова, В.Гуровиц, П.Кожевников, И.Ященко

4. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.



А.Шень

5. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

А.Спивак

Задачи для старших классов

8 класс

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или до закрашенной части, поворачивают направо). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер ее строки и столбца; например, нижняя правая клетка стоит в 100-й строке и 2000-м столбце).

А.Хачатурян

2. Можно ли последовательно поставить на плоскости 100 точек так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

И.Акулич

3. Даны шесть слов: ЗАНОЗА, ЗИПУНЫ, КАЗИНО, КЕФАЛЬ, ОТМЕЛЬ, ШЕЛЕСТ. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую. Сколько шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются и бессмысленные)?

В.Доценко, А.Шень

4. См. задачу М1783 «Задачника «Кванта».

5. Леша задумал двузначное число, а Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Он отгадал, если одну цифру назвал правильно, а в другой ошибся не более чем на единицу (например, если задумано 65, то 65, 64 и 75 подходят, а 63, 76 и 56 – нет). Придумайте способ, гарантирующий Грише успех за 22 попытки.

Фольклор

6 (Продолжение задачи 5). Покажите, что нет способа, гарантирующего Грише успех за 18 попыток.

9 класс

1. Можно ли расставить на футбольном поле четырех футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними составляли 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

А.Митягин

2. В некоторой стране суммарная зарплата 10 процентов самых высокооплачиваемых работников составляет 90 процентов зарплаты всех работников. Может ли быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

М.Вялый

3. Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B, затем от другой стороны в точке C и вернулся в A («угол падения» равен «углу отражения»). Докажите, что центр O окружности, описанной около ΔBCM, лежит на прямой AM.

А.Заславский

4. Камни лежат в трех кучах: в одной 51, в другой 49, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучи в одну, а также разделять кучу из четного числа камней на две равные. Можно ли получить 105 куч по одному камню в каждой?

В.Клепцын

5. Натуральное число N в 999…99 (k девяток) раз больше суммы своих цифр. Укажите все возможные значения k и для каждого из них приведите пример такого числа.

Г.Гальперин

6. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $1/2$ очка, за поражение – 0 очков) и коэффициент силы по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть а) больше 0; б) меньше 0?

А.Толпыго

10 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена, каждый из которых имеет корень, а сумма любых двух не имеет корней?

А.Белов

2. См. задачу М1781 «Задачника «Кванта».

3. Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество $P(x)+P(1-x)=1$.

В.Сендеров

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B и CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

А.Акопян

5. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход любую из них можно передвинуть на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения двух фишек, причем ровно по одному разу?

А.Шаповалов

6. В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый город захватывается с воздуха, а каждым следующим ходом можно захватить любой город, соединенный дорогой с каким-то городом, уже занятым этой армией. Если таких нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая продолжает). Найдется ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

П.Грозман, А.Шаповалов, Д.Шаповалов

11 класс

1. Существуют ли три квадратных трехчлена таких, что каждый имеет два различных действительных корня, а сумма любых двух трехчленов не имеет действительных корней?

А.Белов

2. Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что a_1, a_{10}, a_{30} – натуральные числа. Верно ли, что a_{20} – также натуральное число?

Фольклор

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, I' – центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CB и CA; L и L' – точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL', $I'L$ и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

А.Заславский

4. Докажите, что не существует многочлена $Q(x)$ степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом значении x является простым числом.

А.Белов

5. Докажите, что в пространстве существует 2001 выпуклый многогранник, никакие три из которых не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т.е. имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

А.Белов

6. По кругу расставлено несколько коробочек, в которых лежат шарики (коробочка может быть и пустой). За один ход разрешается взять все шарики из какой-то коробочки и разложить их, начиная со следующей коробочки, двигаясь по часовой стрелке и кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если шарики всегда берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков можно получить любое другое.

В.Гуровиц

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Напомним правила игры «Жизнь». На клетчатом листе стоит несколько фишек. Их расположение во всех клетках одновременно меняется следующим образом. Если в клетках, соседних с данной (по стороне или углу), стоит ровно 3 фишки, то в данную клетку ставится фишка (если ее не было). Если в соседних клетках более 3 или менее 2 фишек, то фишка снимается (если она была). Если в соседних клетках ровно 2 фишки, то состояние клетки не меняется.

Докажите, что в игре «Жизнь» на квадрате 2001×2001 существует конфигурация, не имеющая прообраза. (9) [2]

А.Белов

2. Единичный квадрат разбит на три многоугольника. Докажите, что диаметр хотя бы одного из них не меньше $\sqrt{65}/8$. (9)

Фольклор

[2] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

3. Фокусник угадывает поочередно масть всех карт в колоде из 52 карт. После каждого ответа ему сообщают, угадал он или ошибся. Докажите, что существует стратегия, позволяющая угадать не менее 13 карт, и нет стратегии, позволяющей гарантированно угадать больше. (10)

И.Изместьев

4. В треугольнике ABC отмечена точка O и из нее опущены перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1 на стороны BC, AC, AB. Пусть A_2, B_2, C_2 – вторые точки пересечения прямых AO, BO, CO с окружностью, описанной около ΔABC. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (10)

А.Заславский

5. Найдите для каждого натурального $n > 1$ все функции (не обязательно непрерывные), которые удовлетворяют уравнению $f(x+y) = f^n(x) + f^n(y)$. (10)

Б.Френкин

6. Будем рассматривать последовательности длины n, состоящие из ± 1. Произведением последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ назовем последовательность $\{x_i y_i\}$. Докажите, что для любых k различных последовательностей $s_1, \ldots, s_k$ найдется последовательность s такая, что количество последовательностей, одновременно принадлежащих множествам $Z = \{s_1, \ldots, s_k\}$ и $sZ = \{ss_1, \ldots, ss_k\}$, не превосходит $k^2/2^n$. (10)

А.Белов, В.Сендеров

7. Прямые разбивают верхнюю полуплоскость на многоугольники, диаметр каждого из которых меньше 1, а все стороны больше 0,000001. Докажите, что один из многоугольников можно выдвинуть вниз, не смещая остальные. (10)

А.Белов

Публикацию подготовили
А.Спивак, Б.Френкин