Разновески

И.ГОЛЬДЕС, С.ТАСМУРАТОВ, С.ТАСМУРАТОВА

Набор трех одинаковых по массе гирек обладает примечательным свойством: если любую из этих гирек отложить в сторону, то остальные можно уравновесить на двух чашах весов. Таким же свойством обладает набор из любого нечетного количества одинаковых гирек. Любопытно, что существуют и наборы различающихся по массе гирек, с которыми можно поступать похожим образом. О свойствах этих наборов будет рассказано в данной статье.

Чтобы отличать рассматриваемые наборы гирек от всех остальных, давайте условимся использовать специальный термин. Набор гирек назовем *примечательным*, если после удаления любой гирьки из этого набора оставшиеся можно разложить по двум чашам весов так, что весы окажутся в равновесии.

В примечательном наборе количество гирек нечетно

Сначала предположим, что массы гирек в примечательном наборе выражаются целыми числами (граммов или килограммов – для нас это несущественно).

Утверждение 1. *Числа, выражающие массы гирек в примечательном наборе, имеют одинаковую четность.*

Обозначим массы гирек a_1, a_2, … …, a_n; пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Поскольку числа $S - a_i$ (i пробегает значения 1, 2, …, n) четные, то все числа a_1, a_2, …, a_n имеют одинаковую четность.

Утверждение 2. *Если массы гирек в примечательном наборе выражаются нечетными числами, то количество гирек нечетно.*

Это утверждение следует из того факта, что сумма масс гирек, оставшихся в наборе после удаления любой одной из них, должна быть четной.

Утверждение 3. *Если массы гирек в примечательном наборе выражаются целыми числами, то число гирек нечетно.*

Заметим, что после увеличения или уменьшения масс гирек в примечательном наборе в одно и то же количество раз свойство примечательности набора сохраняется. Если массы гирек в наборе выражаются четными числами, то образуем новый примечательный набор делением всех масс на наибольшую возможную степень двойки. В полученном после такой операции примечательном наборе присутствует по крайней мере одна гирька с нечетной массой, поэтому и все гирьки такого набора имеют нечетные массы (см. утверждение 1). Следовательно, гирек в этом наборе нечетное количество (утверждение 2).

В примечательном наборе нечетное количество гирек будет даже в том случае, если их массы выражаются произвольными действительными числами.

Доказательство этого факта требует привлечения сведений, выходящих за рамки школьной программы, поэтому мы приведем лишь идею доказательства. Как и прежде, будем полагать, что массы гирек примечательного набора выражаются числами a_1, a_2, …, a_n ($n > 2$). Условия равновесия гирек запишем в виде совокупности равенств:

$$\begin{aligned} &0 \cdot a_1 + p_{12}a_2 + \ldots + p_{1n}a_n = 0, \\ &p_{21}a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + p_{2n}a_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_{n1}a_1 + p_{n2}a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты p_{ij} при $i \neq j$ равны либо 1 (при i-м взвешивании j-я гирька находится на левой чаше весов), либо −1 (при i-м взвешивании j-я гирька находится на правой чаше весов); $p_{ii} = 0$ (при i-м взвешивании i-я гирька отложена в сторону). Совокупность равенств (1) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных a_1, a_2, …, a_n. Эта система всегда имеет тривиальное решение $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ (проверьте!).

Если же у системы существует хотя бы одно нетривиальное решение, то, оказывается, различных ненулевых решений существует бесконечное множество! Например, решениями системы

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 \quad - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0, \\ -a_1 - a_2 \quad - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0, \\ a_1 - a_2 - a_3 \quad + a_5 + a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \quad + a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 \quad + a_7 &= 0, \\ -a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \quad &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

являются $a_1 = \frac{1}{13}a_7$; $a_2 = \frac{3}{13}a_7$; $a_3 = \frac{5}{13}a_7$; $a_4 = \frac{7}{13}a_7$; $a_5 = \frac{9}{13}a_7$; $a_6 = \frac{11}{13}a_7$, где переменная a_7 может принимать любые значения (пожалуйста, проверьте). Такая переменная называется свободной переменной. Полагая значение переменной a_7 равным любому целому числу, кратному 13, для остальных переменных также получим целые значения. В общем случае у системы (1) при различных значениях коэффициентов p_{ij} свободных переменных может получиться несколько: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Можно показать, что остальные переменные выражаются через них в виде комбинаций $r_1a_{i_1} + r_2a_{i_2} + \ldots + r_ka_{i_k}$, где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – некоторые *рациональные* числа. Последнее обстоятельство позволяет так подобрать целые значения свободных переменных $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, что все выражения $r_1a_{i_1} + r_2a_{i_2} + \ldots + r_ka_{i_k}$, в которых они используются (а значит, и все остальные переменные), окажутся целыми числами. Таким образом, если существует произвольное нетривиальное решение системы уравнений (1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то существует также решение этой системы, выраженное *целыми* числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Гирек с массами $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в примечательном наборе может быть лишь нечетное количество. Стало быть, и в случае примечательного набора гирек, массы которых выражаются произвольными действительными числами, количество гирек нечетно.

Упражнение 1. В примечательном наборе используются гирьки с массами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ граммов. Докажите, что из твердых стержней с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сантиметров, соединяя их шарнирно, можно образовать многоугольник, который деформируется в равнобедренный треугольник с любым основанием a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Сколько гирек в примечательном наборе?

Мы уже знаем, что в случае равных масс в примечательном наборе может содержаться произвольное нечетное количество гирек (большее 2, разумеется). Кроме того, в примере предыдущего пункта нам удалось вычислить примечательные наборы, состоящие из семи гирек различных масс, в частности 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Способ, с помощью которого мы это сделали, позволяет легко произвести проверку примечательности этого набора:

$$\begin{aligned} &3 + 5 + 7 + 9 = 11 + 13,\\ &1 + 9 + 13 = 5 + 7 + 11,\\ &9 + 13 = 1 + 3 + 7 + 11,\\ &1 + 9 + 11 = 3 + 5 + 13, \qquad (3)\\ &1 + 3 + 5 + 11 = 7 + 13,\\ &1 + 5 + 13 = 3 + 7 + 9,\\ &7 + 11 = 1 + 3 + 5 + 9.\end{aligned}$$

Существуют ли примечательные наборы с меньшим количеством различающихся по массе гирек?

Упражнения

2. Покажите, что не существует примечательного набора с тремя гирьками, массы которых попарно различны.

3. Покажите, что не существует примечательного набора с пятью гирьками, массы которых попарно различны.

Таким образом, 7 – минимальное число гирек, которое может содержать примечательный набор, если массы его гирек попарно различны.

Хорошо, а как быть с бо́льшим количеством гирек? Всегда ли существуют наборы, содержащие 9, 11, 13, ... различающихся по массе гирек?

Ответ на этот вопрос положительный. Сейчас мы построим некоторую конструкцию, позволяющую продолжить уже известный нам ряд $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, $a_6 = 11$, $a_7 = 13$.

Заметим, что в каждом из равенств (3) присутствуют «разделенные соседи»: в левой части найдется такое число, для которого в правой части обнаруживается соседнее с ним нечетное число (число, отличающееся на 2). Если эти два «соседа» поменять местами, то для восстановления «равновесия» в ту часть, куда переместится меньшее число, нужно добавить 4. Следовательно, если два новых члена будут отличаться друг от друга на 4, то их всегда возможно добавить в разные части любого из равенств (3), предварительно переставив в нем двух «соседей» так, чтобы равенство при этом не нарушилось.

Положим $a_8 = x$, $a_9 = x + 4$, где x есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^{7} a_i = a_1 + x + 4.$$

Гирьки с массами $a_1, a_2, \ldots, a_9$ образуют новый примечательный набор. Действительно, семь прежних равенств (3) можно «подправить» описанным выше способом. К ним добавляются два новых равенства:

$$a_2 + \sum_{i=3}^{7} a_i = a_1 + a_9,$$

$$a_1 + \sum_{i=3}^{7} a_i = a_2 + a_8.$$

Заметим, что во вновь полученных равенствах снова присутствуют «разделенные соседи», так что процесс образования новых членов можно продолжить: $a_{10} = y$, $a_{11} = y + 4$, где y есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^{9} a_i = a_1 + y + 4,$$

и так далее.

Упражнение 4. Примечательный набор состоит из пяти гирек. Какими могут быть их массы?