3. Если фокусник всегда называет одну и ту же масть, то он угадает 13 карт. Рассмотрим теперь произвольную стратегию. Пока в колоде остаются хотя бы две масти, очередная карта может оказаться не той масти, которую назвал фокусник. Поэтому при любой стратегии может случиться, что фокусник отгадает лишь карты последней масти в колоде.

4. Вокруг четырехугольника AB_1OC_1 можно описать окружность; $\angle OAB_1 = \angle OC_1B_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, $\angle OBA_1 = \angle OC_1A_1$. В окружности, описанной около треугольника ABC, вписанные углы OAB_1 и OBA_1 опираются на дуги A_2C и B_2C, поэтому их сумма равна $\angle A_2C_2B_2$. Отсюда

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle OC_1B_1 + \angle OC_1A_1 = \angle A_2C_2B_2.$$

Равенство других углов в рассматриваемых треугольниках доказывается аналогично.

5. Уравнение выполняется, если $f(x)$ тождественно равно нулю или какому-либо корню степени $n-1$ из $1/2$. Покажем, что других решений нет. Положим $x = y = 0$: $f(0) = 2f^n(0)$. Отсюда $f(0)$ равно одной из перечисленных констант. Пусть теперь x любое, $y = 0$: $f(x) = f^n(x) + f^n(0)$. Значения $f(x)$ являются корнями многочлена $z^n - z + f^n(0)$, поэтому их количество конечно.

Теперь пусть x любое, $y = x$: $f(2x) = 2f^n(x)$. С учетом предыдущего

$$f(2x) = 2f(x) - 2f^n(0) = 2f(x) - f(0).$$

Если $f(x) > f(0)$, то $f(2x) > f(x)$ и т.д., тогда как множество значений функции конечно. Аналогично, $f(x)$ не может быть меньше $f(0)$.

6. Для произвольной последовательности t рассматриваемого вида положим $Z_t = Z \cap tZ$. Пусть σ – сумма количеств элементов во всех множествах Z_t. Для любых последовательностей p, q существует, и притом ровно одна, последовательность r такая, что $p = rq$. Значит, каждый элемент множества Z входит ровно в k множеств Z_t, и потому $\sigma = k^2$. Так как в этой сумме 2^n слагаемых, то хотя бы одно из них не превосходит $k^2/2^n$. Аналогично получается оценка $l_k = \frac{k(k-1)}{2^n - 1}$, при $2^n > k > 0$ она более точна. Легко видеть, что оценки l_1 и l_{2^n-1} неулучшаемы.

7. Допустим, утверждение задачи неверно. На прямой a, ограничивающей верхнюю полуплоскость, лежат какие-то вершины многоугольников, причем расстояние между любыми из них не меньше 0,000001. Поэтому если двигаться по a слева направо, то для каждой вершины M однозначно определена следующая вершина N (удаленная от M не больше чем на 1). Пусть b – самая правая из прямых разбиения, проходящих через M, а c – самая левая из проходящих через N. Для многоугольника, примыкающего к a, возможные направления выдвигания – это те, которые «смотрят» внутрь многоугольника относительно любой из его сторон, кроме a. По предположению множество таких направлений пусто. Как следствие, прямая разбиения при движении по a слева направо поворачивается по часовой стрелке. Отсюда получаем, что полоса между a, b и c может быть пересечена только горизонтальными прямыми. Но тогда диаметры многоугольников в этой полосе в совокупности не ограничены (при удалении от a прямые b и c удаляются друг от друга).

Избранные задачи Московакой физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. $h = \dfrac{2mr - \alpha m_1 q + m\lambda + 2mc(t_2 - t_1)}{\rho r V^{2/3}} \approx 8{,}23$ см (здесь $t_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C}$).

2. $m = M\dfrac{y - x}{y(1+2x)} = \dfrac{M}{6}$.

3. $\Delta F = 0$, если $\rho \le \rho_0$; $\Delta F = mg(1 - \rho_0/\rho)$, если $\rho > \rho_0$.

9 класс

1. Скорость источника света равна $u\sqrt{2}$ и направлена под углом 45° к стенкам.

2. $t \approx 120 \pm 10$с. *Указание.* Постройте график зависимости $1/v$ от x и вычислите площадь под получившейся кривой.

3. $t_1 = t\dfrac{3v - u}{3v + u}$, при этом $u < 3v$.

4. $\omega > \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{L}}$.

10 класс

1. $F = mgh/l$.

2. Пете понадобится на 10 банок больше.

3. Теплоемкость постоянна и равна $2R$.

4. $R_x = R$. Заметим, что эту задачу нельзя решить в предположении, что внутреннее сопротивление батарейки отсутствует.

11 класс

1. $B_1 = B/4$.

2. $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \approx 72^\circ$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. Ни в каком (месяц «рогами» вверх можно увидеть только вблизи экватора, где снег бывает лишь высоко в горах, а пейзаж на картинке равнинный).

2. $\tau_1 = \tau L/l = 6$ ч.

3. $M = NmL\left(S_2 + S_1 v_1/v_2\right) \approx 250$ г.

9 класс

1. Скорости автомобилей одинаковы и равны 20 м/с.

10 класс

1. Сила равна $N = mg\sqrt{1 - (5/9)\sin^2\alpha}$ и направлена под углом $\varphi = \arcsin\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{9 - 5\sin^2\alpha}}$ к соответствующему третьему стержню.

2. $\alpha = \pi$, если $\Delta W > mv^2/2$; $\alpha = \pi/2$, если $\Delta W = mv^2/2$ и оба осколка движутся (если один из осколков останавливается, то угол α не определен); $\alpha = \arccos\dfrac{mv^2 - 2\Delta W}{mv^2 + 2\Delta W}$, если $\Delta W < mv^2/2$.

3. $p = p_0 T_2/T_1 + np_0 + (1-n)p_{\text{н}} \approx 1{,}9 \cdot 10^5$ Па.