должна занять соответствующую точку A_i; если первая занимает A_i, то вторая – B_i; если первая выбирает B_i, то вторая – одну из точек A_j ($j \neq i$). Дальнейшие действия очевидны. Так как в конце игры вторая армия занимает хотя бы две точки A_i, то первая занимает не более $k + 3$ точек. Поэтому доля городов, захваченных второй армией, не менее $(2k+3)/(3k+6) > 1/2$. В условии задачи вместо $1/2$ можно взять любое число $a < 2/3$ (тогда k нужно брать достаточно большим).

11 класс

1. Да. Например, $(x-3)^2 - 1$, $x^2 - 1$ и $(x+3)^2 - 1$.

2. Да. Пусть q – знаменатель прогрессии. Тогда q^9 и q^{29} – положительные рациональные числа. Это верно и для $q^2 = q^{29-9\cdot 3}$ и $q = q^{9-2\cdot 4}$. Пусть $q = m/n$, где m, n – взаимно простые натуральные числа. Число $a_{30} = a_1 m^{29}/n^{29}$ натуральное, поэтому a_1 делится на n^{29} и тем более на n^{19}. Значит, $a_{20} = a_1 m^{19}/n^{19}$ – число натуральное.

3. Точки I, I' лежат на биссектрисе $\angle ACB$. Опустив из них перпендикуляры IK, $I'K'$ на AC, получаем:

$$\frac{CI}{CI'} = \frac{IK}{I'K'} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Спроектируем CI' на AB:

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{IL}{I'L'}.$$

Пусть F – точка пересечения IL' и $I'L$, а G – ее проекция на AB. Тогда

$$\frac{GL}{GL'} = \frac{FI}{FI'} = \frac{IL}{I'L'} = \frac{LH}{L'H'},$$

откуда $G = H$, что и требовалось.

Дополнение. Докажите, что $CF = FH$.

4. Предположим, такой многочлен $Q(x)$ существует. Если его свободный член (равный $Q(0)$) делится на простое число p, то и $Q(p)$ делится на p. При этом $Q(p) \geq p^2 > p$ и потому является составным. Значит, $Q(0) = 1$. Но многочлен $Q(Q(x))$ обладает всеми свойствами из условия задачи и при этом $Q(Q(0)) = Q(1) > 1$, что противоречит предыдущему.

5. (По работе И.Межирова.) Опишем построение для произвольного количества многогранников N. Пусть правильный N-угольник с центром в начале координат лежит в горизонтальной плоскости и имеет вершины $A_1, \ldots, A_N$ (по часовой стрелке), а точки $B_1, \ldots, B_N$ находятся над ними на высоте 1. Многогранник с номером $k = 1, \ldots, N$ будет представлять собой пирамиду с вершиной B_k, основание которой горизонтально и находится на высоте меньше 1.

Возьмем горизонтальный треугольник с вершиной A_1 и соединим его вершины с B_1, получив первую пирамиду. Пусть k пирамид построены. Если проведена горизонтальная плоскость P на высоте немного меньше чем 1, то сечения пирамид целиком находятся вблизи $B_1, \ldots, B_k$. Пусть C – проекция B_{k+1} на эту плоскость. Проведем из C луч, пересекающий k-е сечение, и будем вращать его в направлении $(k-1)$-го сечения (против часовой стрелки). В какой-то момент он уже не пересекает внутренность k-го сечения, но еще содержит некоторую его граничную точку D_k. Продолжение луча за точку D_k вращаем против часовой стрелки, оно пересечет $(k-1)$-е сечение, затем коснется его и даст точку D_{k-1}. Продолжая аналогично, получим выпуклый многоугольник $D_1 \ldots D_k C$, касающийся сечений построенных пирамид (при $k = 1$, т.е. при построении второй пирамиды, нужно добавить еще одну вершину).

Соединив вершины многоугольника с B_{k+1}, получим $(k+1)$-ю пирамиду. Если ее пересекает горизонтальная плоскость Q, то сечения пирамид плоскостью Q проектируются на части их сечений плоскостью P (из-за наличия вертикального ребра у каждой пирамиды). Поэтому они не имеют общих внутренних точек, и никакие три не соприкасаются в одной точке. Значит, наши пирамиды – искомые многогранники.

6. а) Состояние описанной системы определяется количеством шариков в каждой коробочке и указанием коробочки, из которой нужно взять шарики. Из каждого состояния можно перейти за один шаг в однозначно определенное состояние. Предшествующее также восстанавливается однозначно: начиная с выделенной коробочки и идя против часовой стрелки, нужно брать по шарику из каждой непустой коробочки. Встретив пустую (может быть, после нескольких кругов), положим в нее собранные шарики и объявим отмеченной.

Начав с заданного состояния, будем выполнять операцию из условия задачи. Возможных состояний конечное число, и какое-то из них повторится. Значит, повторилось и предшествующее состояние, и т.д. вплоть до исходного.

б) Теперь состояние системы определяется лишь тем, как разложены шарики по коробочкам. Пусть из состояния X_1 можно перейти за один шаг в X_2 и т.д. вплоть до X_n. Если затем двигаться по правилу пункта а), то через сколько-то шагов придем в X_{n-1}. Далее можно аналогично перейти в X_{n-2} и т.д. вплоть до X_1. Таким образом, если существует путь из одного состояния в другое, то существует путь и обратно.

Осталось найти конкретное состояние X, в которое можно перейти из любого состояния Y (тогда можно перейти из X в произвольное состояние Z, а тем самым и из Y в Z). Отметим некоторую коробочку M. Если каждый раз брать шарики из непустой коробочки, ближайшей к M при движении против часовой стрелки, то либо число шариков в M увеличится, либо ближайшая непустая коробочка станет еще ближе. Процесс не может продолжаться бесконечно, и потому все шарики соберутся в M. Это и есть состояние X.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Число конфигураций конечно. Если одна из них имеет более одного прообраза, то какая-то другая не имеет прообразов. Но «пустая» конфигурация (когда фишек на листе нет) получается из любой конфигурации, в которой имеется только одна или две фишки.

2. Допустим, утверждение задачи неверно. Найдутся две вершины квадрата $ABCD$, которые принадлежат одной и той же части. Если эти вершины – противоположные, то диаметр части не меньше $\sqrt{2}$. Если это соседние вершины A, B, то отложим от них на боковых сторонах по $1/8$, получив точки E, F. Так как $AF = BE = \sqrt{65}/8$, то E и F не принадлежат первой части. Пусть M – середина стороны CD. Тогда $AM = BM > \sqrt{65}/8$; $EM = FM = \sqrt{65}/8$. Значит, M не принадлежит тем частям, что A, B, E, F. Поэтому E и F принадлежат одной и той же части. Вершины C, D могут принадлежать лишь третьей части. Отложив от них на боковых сторонах по $1/8$, получим точки, которые не могут входить в одну часть ни с C, D, ни с A, B ни с E, F.