7. а) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}$;

в) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$.

8. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}; \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

9. Четыре.

10. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}$;
$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$.

11. Пусть сначала ABC – остроугольный треугольник. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, гомотетична с центром H и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ описанной окружности треугольника ABC и, следовательно, проходит через середины отрезков CH, BH и AH. Далее, точка A – ортоцентр треугольника CHB. Мы доказали, что точки, симметричные точке A относительно сторон BC, BH и CH, лежат на окружности BHC (рис. 5). Но эта окружность при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и с центром в точке A переходит в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, проходит через середины сторон AC и AB. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. Обратите внимание на то, что отрезки AB, AC и BC рассматриваются нами то как стороны треугольника ABC, то как отрезки высот треугольников AHB, AHC, BHC.

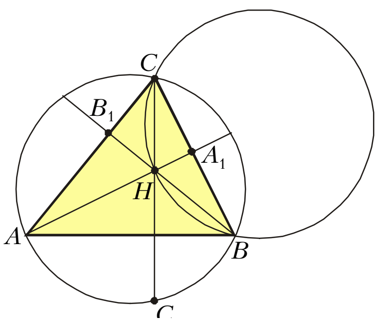

Рис. 5

Разновески

1. Нужно удостовериться в том, что треугольник с длиной основания a_i, где a_i –любое число из указанного набора, существует. Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда $a_n \le \sum_{i=1}^{n-1} a_i - a_j$, $j \ne n$. Значит, $a_n < a_1 + \ldots + a_{n-1}$, и, следовательно, каждый отрезок длины a_i меньше суммы длин всех остальных отрезков.

3. Предположим, массы гирек в примечательном наборе выражаются числами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, причем $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Если убрать a_1, то выполняется только одно равенство $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. В самом деле, неравенства $a_2 + a_3 < a_4 + a_5$, $a_2 + a_4 < a_3 + a_5$ и $a_2 + a_3 + a_4 > a_5$ очевидны (если $a_2 + a_3 + a_4 \le a_5$, то $a_1 + a_2 + a_3 < a_5$, и гирьки a_1, a_2, a_3, a_5 нельзя разбить на две группы равной массы). Рассуждая аналогично (заменой всюду a_1 на a_2), убеждаемся в том, что если убрать a_2, то возможно либо равенство $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$, либо равенство $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$. Из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$
$$a_1 + a_5 = a_3 + a_4$$

находим $a_1 = a_2$, а из совокупности равенств

$$a_2 + a_5 = a_3 + a_4,$$
$$a_5 = a_1 + a_3 + a_4$$

находим $a_1 = -a_2$, чего не может быть. Значит, удовлетворяющего условию задачи набора из пяти гирек с попарно различными массами не существует.

4. С точностью до произвольного множителя $m > 0$ решение задачи имеет один из видов: {1,1,1,1,1}, {1,1,1,3,3}, {1, 1, 1, 1, 3}, {1, 1, 3, 3, 5}.

Магнитные явления

1. $B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi^2 r^2 \sqrt{\pi\varepsilon_0 rm}} \approx 4$ Тл.

2. $I = \frac{mg}{\sqrt{2}aB}$.

3. Внутри металла $B = \mu_0 q\omega/(2\pi) = 2\cdot10^{-11}$ Тл, а в полости цилиндра и во внешнем пространстве магнитное поле отсутствует.

4. $l = \frac{mv_0}{\sqrt{\alpha^2 + (qB)^2}}$.

LXIV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. AX = 29, $УX$ = 69 или, наоборот, AX = 69, $УX$ = 29. Поскольку $2001 = 3\cdot23\cdot29$, число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: $69\cdot29$ или $23\cdot87$.

2. Если оптовая цена ручки x рублей, то $5 - x = 10 - 3x$, откуда $x = 2{,}5$, т.е. 2 рубля 50 копеек.

3. 20 пакетиков.

4. Если рядом стоят числа a и b, то следующим стоит число b/a, за ним $1/a$, потом $1/b$ и, наконец, a/b. Эти шесть чисел удовлетворяют условию задачи. Конечно, при неудачном выборе чисел a и b какие-то из указанных чисел совпадут, но нас это не остановит: для решения задачи достаточно предъявить один пример. Например, взять $a = 2$, $b = 3$.

5. В Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу. *Решение*. Если в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали x, y и z снежков соответственно, то всего было брошено $13 + x + y + z$ снежков. С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль – $5y$, а Тофсла – $(4z+1)$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение

$$6x + 5y + 4z + 1 = 13 + x + y + z,$$

откуда $5x + 4y + 3z = 12$. Так как x, y, z – целые неотрицательные числа, то $(x;y;z) = (1;1;1)$, $(0;3;0)$ и $(0;0;4)$. Но поскольку в самого себя кидать снежки нельзя, то среди чисел x, y, z не может быть двух нулей. Поэтому возможен только первый случай.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

Рис. 6

6. См. рис.6.

7 класс

1. Конечно, это опечатка. Любая степень числа, оканчивающегося цифрой 1, тоже оканчивается цифрой 1. Поэтому разность $23021^{377} - 1$ оканчивается на 0 и, следовательно, не является простым числом.

2. Да, могло, если он один раз попал и три раза промахнулся. Решение проще всего найти, если разложить 8019 на множители: $8019 = 9^3\cdot11$. После удачного выстрела количество денег умножается на 1,1, а после неудачного – на 0,9, и

$$100\cdot1{,}1\cdot(0{,}9)^3 = 80{,}19.$$