вого куска следует откусить $k - p$ раз. В результате массы кусков станут равны $m \cdot 2^{n-(k-p)}$ и $m \cdot 2^{10-n-p}$, а поскольку они сравняются между собой, то $n - (k - p) = 10 - n - p$, откуда

$$k = 2(n + p - 5),$$

т.е. k – четное число. Но $1 \le k \le 3$, следовательно, $k = 2$. Далее, так как $k/2 < p \le k$, то $p = 2$. Поэтому

$$2 = 2(n + 2 - 5), \text{ и } n = 4.$$

Таким образом, первоначальные массы частей равны $m \cdot 2^4 = 16m$ и $m \cdot 2^{10-4} = 64m$. В сумме это составляет 1 кг, или 1000 г, поэтому $16m + 64m = 1000$, откуда $m = 12{,}5$ г. Окончательная же масса обеих частей равна $12{,}5 \times 2 = 25$ г, что противоречит условию, согласно которому на долю медвежат досталось меньше 20 г сыра.

Следовательно, медвежата *неправы*.

Правомерен вопрос: а возможно ли вообще, чтобы после десятого откусывания медвежатам досталось меньше 20 г сыра? Оказывается, да. Простейший пример: лиса разламывает сыр на части, массы которых соотносятся как 1:1024, а затем 10 раз откусывает от большей части. В результате массы кусков уравниваются, но в каждом из них будет меньше грамма! Возможны и другие, менее грабительские, варианты.

19. Пусть числа записаны на карточках, выложенных в ряд. Будем менять карточки и увеличивать вдвое числа на них. Две карточки, раз поменявшись местами, обратно поменяться не могут. Предположим противное и выберем пару (A, B), первой поменявшуюся обратно. Ясно, что в промежутке между прямым и обратным обменами была еще хотя бы одна операция с A или B, иначе левое число так и осталось бы меньше правого. Однако карточка, поменявшись с A, попадет между A и B. Снова с A она не менялась – иначе обратный обмен A и B не первый. Остаться между A и B она тоже не может – тогда A и B не смогут поменяться. Значит, она поменялась с B. Но тогда сколько раз в промежутке поменялась A, столько раз поменялась и B, значит, числа на A и B увеличились в одинаковое количество раз, правое осталось больше левого, и они таки не могли поменяться.

20. Разделим клетки доски на 16 крайних, одну центральную и 8 средних. На средние клетки было сделано 8 ходов, один из них из центра, поэтому не более 7 – с края. Значит, с края на край сделано не менее 9 ходов. Предположим, с края на край нет ходов по диагонали, тогда по принципу Дирихле вдоль одной из сторон квадрата сделано не менее 3 ходов с края на край. Для них есть 3 начальных и 3 конечных клетки, но на одном краю доски только 5 клеток, поэтому какая-то начальная совпадет с конечной, т.е. найдутся два последовательных хода в одном направлении, чего быть не может. Итак, имеется ход D с края на край по диагонали. Тогда он отсекает угол, и ход из этого угла (или в этот угол) пересекает D. Таким образом, ломаная должна быть самопересекающейся.

Параллельная проекция

1. Пусть параллельные прямые a и b проектируются параллельно прямой l на плоскость π. Тогда плоскости, проходящие через a и b и параллельные l, параллельны между собой и, значит, пересекают π по параллельным прямым. Следовательно, параллельной проекцией параллелограмма будет параллелограмм, и равные параллельные отрезки проецируются в равные. Для завершения доказательства достаточно заметить, что по теореме Фалеса отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, равно отношению длин их проекций.

2. Противоположные стороны двух параллелограммов, изображенных на рисунке 2 статьи, лежат на одних прямых. Их проекции обладают тем же свойством и, значит, равновелики. Пусть теперь даны два равновеликих параллелограмма $ABCD$ и $KLMN$. Заменим $ABCD$ равновеликим параллелограммом $ABC'D'$, сторона BC' которого параллельна KL, а $KLMN$ — равновеликим параллелограммом $KLM'N'$, сторона LM' которого параллельна AB. Поскольку параллельная проекция сохраняет отношения параллельных отрезков, проекции этих, а значит, и исходных параллелограммов равновелики.

3. Возьмем равнобедренный треугольник ABC с вершиной C, лежащей на линии пересечения исходной плоскости и плоскости проекции, и основанием AB, параллельным этой линии (см. рис. 3 статьи). Его проекцией будет также равнобедренный треугольник $CA'B'$, причем $A'B' = AB$, а высота $CD' = CD\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями. Следовательно, $\operatorname{tg}\angle A'CD' = \operatorname{tg}\angle ACD/\cos\varphi$. Пусть $\operatorname{tg}\angle ACD = \varepsilon, \cos\varphi = \varepsilon^2$, где ε достаточно мало. Тогда близкий к нулю угол ACB проецируется в близкий к π угол $A'CB'$.

4. Пусть O — вершина трехгранного угла. На ребре, двугранный угол при котором равен γ, отложим отрезок $OC = 1$, проведем через C плоскость, перпендикулярную OC, и найдем точки A и B ее пересечения с другими ребрами (рис.4). Получаем

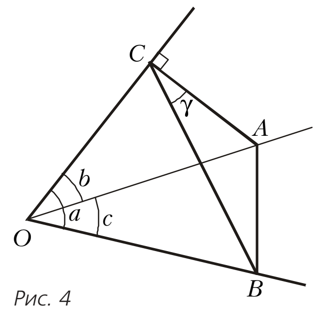

Рис. 4

$$CB = \operatorname{tg} a,\ CA = \operatorname{tg} b,\ OB = 1/\cos a,\ OA = 1/\cos b,$$

$$AB^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos\gamma,$$

$$\cos c = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma .$$

5. Докажем сначала, что если прямой угол ортогонально проецируется в прямой, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что проекцией прямого угла ACB является прямой угол ADB. Но в этом случае все углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые, т.е. $AC > AD$, $BC > BD$, $AC^2 + BC^2 > AD^2 + BD^2$ — противоречие.

Пусть теперь диагонали четырехугольника $A'B'C'D'$ перпендикулярны. Так как эти диагонали являются проекциями перпендикулярных друг другу противоположных ребер тетраэдра, одно из этих ребер, например BD, параллельно плоскости проекции. Тогда плоскость симметрии тетраэдра, проходящая через AC и середину BD, перпендикулярна площади проекции, и $A'B'C'D'$ симметричен относительно прямой $A'C'$, в которую проецируется эта плоскость. Отсюда сразу вытекает требуемое утверждение.

Ортоцентрический треугольник

2. $l|\cos\gamma|$.

3. а) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$; в) от 0 до 1.

Указание. $c = 2R\sin\gamma$, т.е. $A_1B_1 = 2R\sin\gamma|\cos\gamma|$.

4. Определите углы, образуемые прямыми A_1B_1 и OC со стороной AC.

5. Rp_1. *Указание.* В четырехугольниках OA_1CB_1, OA_1BC_1, OB_1AC_1 диагонали перпендикулярны, а сумма их площадей равна площади исходного треугольника.

6. а) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi-\alpha_1}{2}, \frac{\pi-\beta_1}{2}, \frac{\pi-\gamma_1}{2}$.