количество гирек (большее 2, разумеется). Кроме того, в примере предыдущего пункта нам удалось вычислить примечательные наборы, состоящие из семи гирек различных масс, в частности 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Способ, с помощью которого мы это сделали, позволяет легко произвести проверку примечательности этого набора:

$$\begin{aligned} &3 + 5 + 7 + 9 = 11 + 13,\\ &1 + 9 + 13 = 5 + 7 + 11,\\ &9 + 13 = 1 + 3 + 7 + 11,\\ &1 + 9 + 11 = 3 + 5 + 13, \qquad (3)\\ &1 + 3 + 5 + 11 = 7 + 13,\\ &1 + 5 + 13 = 3 + 7 + 9,\\ &7 + 11 = 1 + 3 + 5 + 9. \end{aligned}$$

Существуют ли примечательные наборы с меньшим количеством различающихся по массе гирек?

Упражнения

2. Покажите, что не существует примечательного набора с тремя гирьками, массы которых попарно различны.

3. Покажите, что не существует примечательного набора с пятью гирьками, массы которых попарно различны.

Таким образом, 7 – минимальное число гирек, которое может содержать примечательный набор, если массы его гирек попарно различны.

Хорошо, а как быть с бо́льшим количеством гирек? Всегда ли существуют наборы, содержащие 9, 11, 13, … различающихся по массе гирек?

Ответ на этот вопрос положительный. Сейчас мы построим некоторую конструкцию, позволяющую продолжить уже известный нам ряд $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, $a_6 = 11$, $a_7 = 13$.

Заметим, что в каждом из равенств (3) присутствуют «разделенные соседи»: в левой части найдется такое число, для которого в правой части обнаруживается соседнее с ним нечетное число (число, отличающееся на 2). Если эти два «соседа» поменять местами, то для восстановления «равновесия» в ту часть, куда переместится меньшее число, нужно добавить 4. Следовательно, если два новых члена будут отличаться друг от друга на 4, то их всегда возможно добавить в разные части любого из равенств (3), предварительно переставив в нем двух «соседей» так, чтобы равенство при этом не нарушилось.

Положим $a_8 = x$, $a_9 = x + 4$, где x есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^{7} a_i = a_1 + x + 4 .$$

Гирьки с массами $a_1, a_2, \ldots, a_9$ образуют новый примечательный набор. Действительно, семь прежних равенств (3) можно «подправить» описанным выше способом. К ним добавляются два новых равенства:

$$a_2 + \sum_{i=3}^{7} a_i = a_1 + a_9,$$

$$a_1 + \sum_{i=3}^{7} a_i = a_2 + a_8 .$$

Заметим, что во вновь полученных равенствах снова присутствуют «разделенные соседи», так что процесс образования новых членов можно продолжить: $a_{10} = y$, $a_{11} = y + 4$, где y есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^{9} a_i = a_1 + y + 4 ,$$

и так далее.

Упражнение 4. Примечательный набор состоит из пяти гирек. Какими могут быть их массы?

Отклонение частиц и световых лучей полем тяготения

(Начало см. на с.39)

В рамках ОТО фокусное расстояние гравитационной линзы определяется с учетом формулы Эйнштейна и поэтому равно

$$F = \frac{b^2}{2R_g} = \frac{b^2 c^2}{4GM} .$$

Для Солнца при $b \approx R$ получаем $F \approx 8{,}3 \cdot 10^{13}$ м. Понятно, что сделанные выше выводы о возможности наблюдения эффекта гравитационной линзы от Солнца и звезд остаются в силе.

Эффект гравитационной линзы был предсказан Эйнштейном в 1936 году, но он оставался лишь теоретическим предсказанием более сорока лет. В 1979 году был открыт удивительный объект – двойной квазар QSO 0957 + + 561. Изображение квазара, полученное в различных диапазонах электромагнитного излучения, состояло из двух отдельных почти точечных изображений, отделенных друг от друга угловым расстоянием $5{,}7''$, имеющих идентичные спектры и почти одинаковую яркость. Гравитационной линзой в этом случае служила большая эллиптическая галактика (или скопление галактик), находящаяся на пути от квазара к Земле и создающая его двойное изображение.

В обычной (тонкой) линзе, как известно, все преломленные лучи собираются в одной точке – фокусе линзы. В гравитационной линзе дело обстоит не так: чем ближе к притягивающему центру проходит луч, тем сильнее он преломляется и тем меньше расстояние от центра до точки F пересечения лучей. Вместо одного фокуса в гравитационной линзе возникает целая фокальная ось. Если ядро гравитационной линзы не пропускает свет, то пересечение лучей возможно только начиная с некоторого минимального расстояния F, определяемого последней формулой. В этой точке и начинается фокальная ось, которая простирается в область $x > F$.

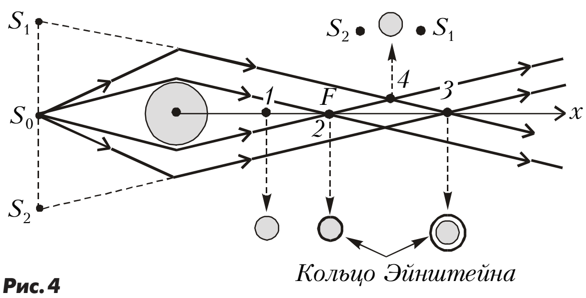

Рис. 4

На рисунке 4 показано, как выглядит «точечный» источник, если смотреть на него сквозь гравитационную линзу. Если наблюдатель находится на оси в точке *1*, где $x < F$, то источник S_0 совсем не виден, так как он закрыт непрозрачным ядром линзы. В точке *2*, где $x = F$, изображение источника появляется со всех сторон от ядра, поэтому здесь источник виден как светящееся кольцо, примыкающее к ядру. При увеличении расстояния (точка *3*) кольцо отрывается от ядра, между ними возникает зазор, который постепенно возрастает по мере удаления наблюдателя (кольцевое изображение источника называют кольцом Эйнштейна). Теперь представим, что удаленный наблюдатель сместился на некоторое расстояние от оси (точка *4*). Картина становится совсем иной. Симметрия лучей нарушается, светящееся кольцо разрывается на две дуги, которые по мере удаления от оси стягиваются в маленькие кружки. Наблюдатель увидит вместо одного источника S_0 два его изображения: S_1 и S_2.