Ясно, что расстояние между этими двумя точками не превосходит 0,5.

Если же множеству S принадлежит не более четырех отмеченных точек, то множеству T принадлежит 5 или более отмеченных точек. Воспользуемся тем, что множество T является объединением четырех подмножеств, каждое из которых в свою очередь является объединением трех черных треугольников с общей вершиной (вершиной тетраэдра). В одном из этих подмножеств найдутся две отмеченные точки. Расстояние между ними не больше 0,5, так как диаметр подмножества равен 0,5.

в) Представим тетраэдр $ABCD$ как объединение четырех правильных тетраэдров с длиной ребра 0,5 у каждого и правильного октаэдра Q (тоже с длиной ребра 0,5).

Если четырем тетраэдрам вместе принадлежат 5 или более отмеченных точек, то, рассуждая как в предыдущем пункте, мы обнаружим, что найдутся две среди них с расстоянием не более 0,5.

Таким образом, все свелось к рассмотрению случая, когда 5 (или более) отмеченных точек принадлежат октаэдру Q. Разрежем октаэдр Q на четыре многогранника, диаметр каждого из которых будет равен длине ребра октаэдра, т.е. 0,5. И дальше все получится… Но только я это написал, как тут же спохватился: ведь разрезать октаэдр таким образом я не умею! Более того, я не уверен, что это возможно.

Тогда, как «нормальному герою», мне придется идти в обход.

Опишем около октаэдра Q сферу, спроектируем на ее поверхность из ее центра 5 отмеченных в Q точек – получим точки X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5. Нам достаточно доказать, что среди пяти проектирующих лучей найдутся два, угол между которыми не превосходит 90°.

Проведем три большие попарно перпендикулярные окружности l_1, l_2 и l_3 на сфере так, чтобы l_1 и l_2 пересекались в точке X_1 и чтобы точка X_2 принадлежала окружности l_1. Три окружности разделили сферу на 8 сферических треугольников. Нужно убедиться, что найдутся две отмеченные точки, принадлежащие одному из них. Мы видим, что остались только два сферических треугольника, которым не принадлежат ни X_1, ни X_2. Но тогда им принадлежат три точки X_3, X_4 и X_5. При всех вариантах в один из треугольников попадают две точки.

В.Произволов

Ф1773. *На тонкий горизонтальный стержень насажена цилиндрическая шайба диаметром D и толщиной l, дырка по оси шайбы имеет диаметр чуть больше, чем диаметр стержня (рис.1). К краю шайбы приложена сила $\vec{F}$, параллельная стержню. При каком коэффициенте трения шайбы о стержень движение шайбы будет равномерным? Сила тяжести отсутствует!*

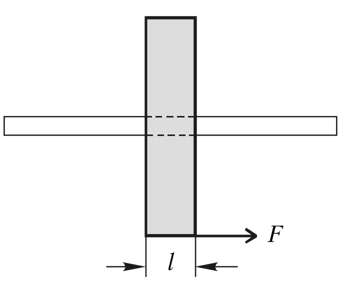

Рис.1

При воздействии силы $\vec{F}$ на шайбу она будет немного перекошена – на рисунке 2 перекос показан сильно преувеличенным. Контакт шайбы со стержнем получается в двух точках – A и $Б$. Силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ должны уравновешивать друг друга:

$$N_1 = N_2 = N .$$

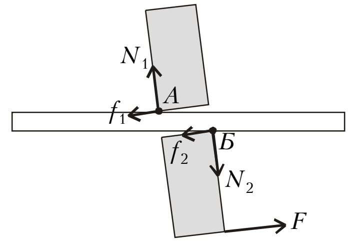

Рис.2

Силы трения $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ в сумме компенсируют $\vec{F}$ (движение шайбы по условию равномерное):

$$f_1 + f_2 = F .$$

Проскальзывание есть, так что

$$f_1 = f_2 = f = \mu N .$$

Запишем еще условие для моментов сил (можно для аккуратности перейти в движущуюся вместе с шайбой инерциальную систему отсчета). Удобно рассматривать моменты сил относительно точки A – из-за малого диаметра стержня можно не учитывать момент силы $\vec{f}_2$:

$$N_2 l - F\frac{D}{2} = 0 , \text{ откуда } N = N_2 = F\frac{D}{2l} .$$

Окончательно найдем

$$2\mu F\frac{D}{2l} = F , \text{ и } \mu = \frac{l}{D} .$$

А.Зильберман

Ф1774. *Легкий жесткий стержень подвешен горизонтально за концы при помощи двух легких нитей, вытянутых по вертикали (рис.1). На стержень насажены два груза массами M и 2M, расположенных симметрично на равных расстояниях друг от друга и от концов стержня. Нить со стороны тяжелого груза пережигают. Во сколько раз изменится сила натяжения оставшейся нити сразу после этого? Считайте, что за интересующий нас короткий временной интервал стержень не успевает заметно сдвинуться.*

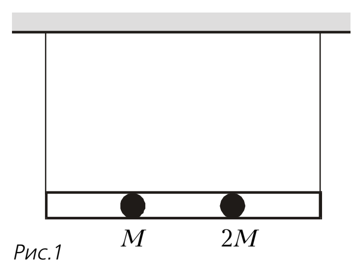

Рис.1

Выберем для расчетов малый интервал времени τ – такой малый, что стержень после пережигания нити смещается из начального положения очень мало. Тогда можно считать, что точка A (рис.2) практически неподвижна, а стержень поворачивается вокруг точки A. До пережигания нити сила T_1 находится из уравнения моментов (удобно считать моменты сил относительно точки $Б$):

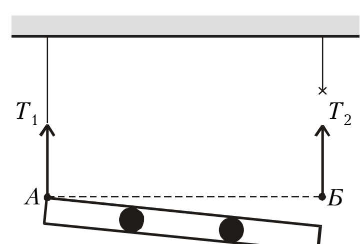

Рис.2

$$2Mg\frac{l}{3} + Mg\frac{2l}{3} - T_1 l = 0 , \text{ и } T_1 = \frac{4}{3}Mg .$$

Для определения силы T_1^*, сразу после пережигания, найдем ускорение центра масс системы $a_ц$ и воспользуемся уравнением второго закона Ньютона

$$3Mg - T_1^* = 3Ma_ц .$$