откуда

$$CQ = T_1Q\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = r\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

5. Пусть $IX \perp K_1K_2$, $X \in K_1K_2$. Тогда

$$\angle K_1IK_2 = 2\angle K_1K_3K_2 = 2\gamma \Rightarrow \angle K_1IX = \gamma,$$

стало быть,

$$IX = r\cos\gamma.$$

Но

$$\angle XIP = \angle L_3IT_3 = \frac{|\beta-\alpha|}{2},$$

поэтому

$$IP = \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

и из равенства

$$CI = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

следует, что

$$CP = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

6. Докажем, что $CP + CS = 2CQ$, т.е. что Q – середина отрезка SP. Имеем:

$$CP + CS = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{r\cos\gamma}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}} + \frac{r\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{r\cos\alpha}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}(1+\cos\gamma) = \frac{2r\cos\alpha^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = 2CQ.$$

Значит, T_1T_2 – серединный перпендикуляр к отрезку SP. Продлим K_1K_2 и H_1H_2 до пересечения в точке Y. Мы доказали, что $\measuredangle(H_1H_2, SP) = \measuredangle(SP, K_1K_2)$, значит, треугольник SYP – равнобедренный, поэтому прямые H_1H_2 и K_1K_2 симметричны относительно YQ, т.е. относительно T_1T_2. Это означает, что K_1K_2 совпадает с прямой l_3. Аналогично, l_1 и l_2 – это прямые K_2K_3 и K_1K_3, следовательно, треугольник, составленный из прямых l_1, l_2, l_3, – это $K_1K_2K_3$. Его вершины лежат на вписанной в треугольник ABC окружности, что и требовалось доказать.

Т.Емельянова, А.Гайфуллин, Д.Терешин

М1764. *Пусть функция $f:[0;1] \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0) = 0$, $f(1) > 0$, f монотонно возрастает на $[0;1]$ и для любых x_1, $x_2 \in [0;1]$, для которых $x_1 + x_2 \in [0;1]$, выполняется неравенство*

$$f(x_1) + f(x_2) \ge f(x_1 + x_2).$$

Докажите, что тогда последовательность чисел

$$s_n = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

не ограничена.

Так как для любого $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \ge k\cdot\frac{1}{2k} = \frac{1}{2},$$

то, как известно, последовательность чисел $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не ограничена сверху (т.е. $a_n \to \infty$).

Задача будет решена, если мы докажем, что существует $c > 0$ со следующим свойством: $s_n \ge c\cdot a_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Для достижения этого достаточно показать, что для всех $x \in (0;1]$

$$f(x) \ge \frac{f(1)}{2}x. \qquad (*)$$

Приведем доказательство неравенства $(*)$.

Для всех $x \in [1/2;1]$ имеем $x \le 1 \le 2x$. Тогда, применяя свойства f, получаем

$$f(1) \le f(2x) = f(x+x) \le f(x) + f(x) = 2f(x),$$

откуда, с учетом $0 \le x \le 1$, следует неравенство $(*)$.

Далее можно применить математическую индукцию. Пусть неравенство $(*)$ выполняется для любого $x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Тогда при $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n}\right]$ имеем $2x \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. В силу предположения тогда $f(2) \ge \frac{f(1)}{2}(2x)$. С другой стороны, как уже отмечено выше, $2f(x) \ge f(2x)$. Потому имеем $2f(x) \ge \frac{f(1)}{2}(2x)$, что равносильно неравенству $(*)$. Поскольку любой $x \in (0;1]$ находится в некотором отрезке вида $\left[\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, то неравенство $(*)$ доказано и задача решена.

В.Попов

М1765. *Длина ребра правильного тетраэдра равна 1.*
а) На ребрах тетраэдра отмечены 5 точек.
б) На поверхности тетраэдра отмечены 9 точек.
в) В тетраэдре отмечены 9 точек.*
Докажите, что в каждом случае найдутся две отмеченные точки, расстояние между которыми не превосходит 0,5.

а) Три полуребра, выходящих из какой-либо вершины тетраэдра $ABCD$, назовем репером. Таким образом, каркас тетраэдра (т.е. объединение его ребер) состоит из четырех реперов. Так как отмеченных точек пять, то найдутся две из них M и N, которые принадлежат одному реперу. Остается заметить, что диаметр репера равен 0,5, а, значит, $MN \le 0{,}5$.

б) Средние линии разделяют каждую грань тетраэдра $ABCD$ на четыре треугольника. Треугольник, ограниченный средними линиями, в каждой грани оставляем белым, а объединение четырех таких треугольников называем множеством S. Все угловые треугольники (их 12) закрашиваем в черный цвет, а их объединение называем множеством T. Если 5 или более из 9 отмеченных точек попали в белое множество S, то среди них найдутся две, которые попадут в один из четырех белых треугольников.