Значит, по лемме 1 ни в одном из ящиков нет карточек с двумя последовательными числами.

Далее, полагая, что $y = 1$, если x лежит в КЯ и $x + 1$ – в СЯ, и $y = n - 1$, если x находится в БЯ и $x + 1$ – в КЯ, по лемме 2 получаем, что в этих случаях фокус не удастся. Аналогично фокус не удастся, если x лежит в СЯ, а $x + 1$ в БЯ. Итак, если a находится в КЯ, то $a + 1$ – в БЯ, $a + 2$ – в СЯ, $a + 3$ – в БЯ и т.д. Значит, в КЯ находятся числа, сравнимые с 1 по модулю 3, в БЯ – сравнимые с 2, в СЯ – делящиеся на 3. Покажем, что такое расположение карточек подходит: сумма чисел на карточках из КЯ и БЯ делится на 3, из КЯ и СЯ сравнима с 1 по модулю 3, из СЯ и БЯ – с 2, т.е. всегда можно определить, из каких ящиков взяты карточки.

Мы получили, что если карточка 1 лежит в КЯ, а карточка с наименьшим числом не из КЯ находится в БЯ, то есть два варианта раскладывания карточек. Аналогично рассуждаем в случае других пяти пар ящиков. Значит, всего имеется $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ различных способов.

Н.Агаханов, А.Гайфуллин

М1762. *Существует ли натуральное число n такое, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?*

Докажем по индукции, что для любого натурального k существует натуральное n_k, имеющее k различных простых делителей, делящееся на 3 и такое, что $2^{n_k} + 1$ делится на n_k.

Для $k = 1$ можно взять $n = 3$. Пусть число $n_k = n$, кратное 3, имеет k различных простых делителей, причем $2^n + 1$ делится на n.

Число $2^{3n} + 1 = \left(2^n + 1\right)\left(2^{2n} - 2^n + 1\right)$ делится на $3n$. Это следует из того, что $2^n + 1$ делится на n, а

$$2^{2n} - 2^n + 1 = \left(2^n - 2\right)\left(2^n + 1\right) + 3 \qquad (*)$$

делится на 3 (поскольку при нечетном n числа $2^n + 1$ и $2^n - 2$ делятся на 3).

Далее, число $2^{2n} - 2^n + 1$ не делится на 9, поскольку на 9 делится произведение $\left(2^n - 2\right)\left(2^n + 1\right)$. Значит, поскольку $2^{2n} - 2^n + 1 > 3$ при $n > 1$, то это число имеет при $n > 1$ простой делитель $p > 3$. Так как НОД $\left(2^n + 1, 2^{2n} - 2^n + 1\right) = 3$ (это тоже ясно из равенства (*)), то p – не делитель n.

Из сказанного следует, что число $3pn$ имеет $k + 1$ простой делитель, причем $2^{3pn} + 1$ делится на $3pn$. Последнее следует, например, из равенства

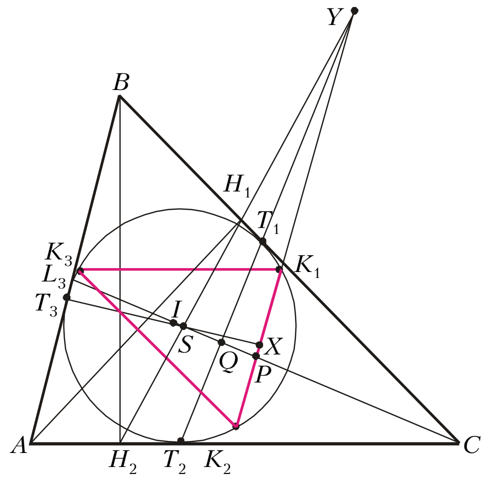
$$\left(2^{3n}\right)^p + 1 = \left(2^{3n} + 1\right)\left(\left(2^{3n}\right)^{p-1} - \left(2^{3n}\right)^{p-2} + \ldots + 1\right).$$

Для завершения решения достаточно положить $n_{k+1} = 3pn = 3pn_k$.

А.Егоров, В.Сендеров

М1763. *Пусть AH_1, BH_2, CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2, l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симметрии относительно прямых T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 соответственно.*

Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник ABC.



1. Будем обозначать через $\measuredangle(l, m)$ направленный угол между прямыми l и m.

Пусть $\measuredangle(AC, AB) = \alpha$, $\measuredangle(AB, BC) = \beta$, $\measuredangle(BC, CA) = \gamma$, тогда (см. рисунок)

$$\measuredangle(H_1H_2, AC) = -\beta \text{ (так как } \Delta H_1CH_2 \backsim \Delta ACB\text{)},$$

$$\measuredangle(T_1T_2, AC) = \frac{-\alpha - \beta}{2} \text{ (так как } CT_1 = CT_2\text{)},$$

$$\text{значит, } \measuredangle(H_1H_2, T_1T_2) = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

2. Рассмотрим гомотетию с отрицательным коэффициентом, переводящую описанную окружность треугольника ABC во вписанную. Пусть $K_1K_2K_3$ – образ ABC при этой гомотетии, тогда стороны треугольника $K_1K_2K_3$ параллельны сторонам треугольника ABC, значит,

$$\measuredangle(K_1K_2, T_1T_2) = \measuredangle(AB, T_1T_2) = (AB, AC) + \measuredangle(AC, T_1T_2) =$$

$$= -\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = -\measuredangle(H_1H_2, T_1T_2).$$

Проведем AL_1, BL_2, CL_3 – биссектрисы треугольника ABC, тогда $CL_3 \perp T_1T_2$ и $\measuredangle(K_1K_2, CL_3) = -\measuredangle(H_1H_2, CL_3)$. Пусть $CL_3 = l_C$, P, Q, S – точки пересечения CL_3 с K_1K_2, T_1T_2 и H_1H_2 соответственно, I – центр вписанной окружности треугольника ABC, r – ее радиус. Вычислим длины отрезков CP, CQ и CS.

3. $\Delta H_1CH_2 \backsim \Delta ACB \Rightarrow CS = l_C \cdot \dfrac{CH_1}{CA} = l_C \cos\gamma$, но

$$IL_3 = \frac{r}{\cos\dfrac{\beta - \alpha}{2}}, \text{ так как } \angle L_3IT_3 = \frac{|\beta - \alpha|}{2},$$

значит,

$$l_C = r\left(\frac{1}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\cos\dfrac{\beta - \alpha}{2}}\right),$$

тогда

$$CS = r\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} + \frac{\cos\gamma}{\cos\dfrac{\beta - \alpha}{2}}\right).$$

4. $\angle T_1CI = \dfrac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle T_1IQ = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$, значит,

$$T_1Q = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = r\cos\frac{\gamma}{2},$$