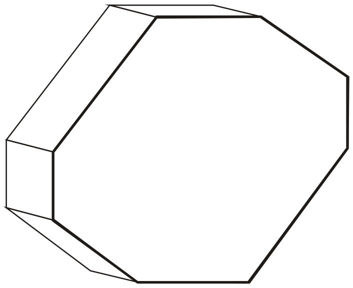


Рис.2

докажем второе вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Центрально-симметричный выпуклый 2n-угольник можно разрезать на $\frac{n(n-1)}{2}$ параллелограммов, но нельзя разрезать на меньшее число параллелограммов.*

На рисунке 2 показано, как центрально-симметричный выпуклый $2n$-угольник можно разрезать на $n-1$ параллелограмм и центрально-симметричный выпуклый $2(n-1)$-угольник. Отсюда индуктивно вытекает первая часть утверждения.

Обоснуем вторую часть утверждения. Возьмем произвольную пару непараллельных сторон нашего $2n$-угольника – AB и KL (рис.3). При этом $2n$-угольник каким-то образом разрезан на параллелограммы. Тогда найдется дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону AB с параллельной ей стороной CD, и найдется вторая дорожка из параллелограммов, соединяющая сторону KL с параллельной ей стороной EN. Эти дорожки пересекаются, т.е. имеют общий параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам AB и KL. Делаем вывод: любая пара непараллельных сторон $2n$-угольника порождает в разбиении такой параллелограмм, но подобных различных пар (а точнее – пар направлений) в точности $\frac{n(n-1)}{2}$ штук. Значит, различных параллелограммов в любом разбиении не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$ штук.

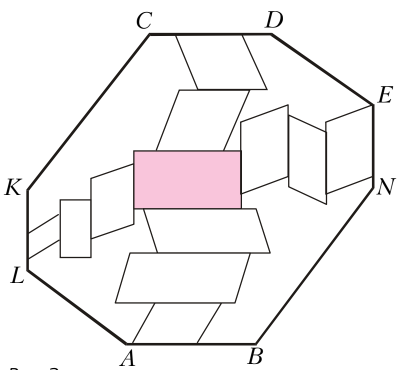


Рис.3

Артподготовка на этом закончилась; делаем заключительный залп по самой задаче. Согласно лемме 1, условием задачи задан центрально-симметричный $2n$-угольник M. Согласно лемме 2, $\frac{n(n-1)}{2} \le 20$, т.е. $n \le 6$. Иначе говоря, $2n$-угольник M имеет не более 12 сторон. Но в таком случае M можно разрезать на не более чем 15 параллелограммов, а значит, и ровно на 15. Этим все доказано.

В.Произволов

M1758. *Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.*

Всякий i-й депутат имеет свой абсолютный рейтинг R_i. В начальный момент (после избрания) каждый i-й депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг: $r_i = R_i/S$, где S – сумма всех абсолютных рейтингов данной фракции.

Обозначим через $S_i(t)$ и $S_j(t)$ суммы всех абсолютных рейтингов депутатов i-й и j-й фракций в момент t. Согласно условию переход k-го депутата (в момент t) из i-й фракции в j-ю реализуется, если и только если выполняется неравенство $R_k/S_i(t) < R_k/\left(S_j(t)+R_k\right)$, т.е. $S_i(t) > S_j(t) + R_k$, или

$$R_k + S_j(t) - S_i(t) < 0. \qquad (*)$$

Отметим, что здесь получаем $S_i(t+1) = S_i(t) - R_k$ и $S_j(t+1) = S_j(t) + R_k$.

Теперь рассмотрим функцию $L(t) = \sum S_m^2(t)$, где индекс m пробегает все номера фракций. Покажем, что при реализации перехода $L(t)$ убывает. Действительно, пусть в момент t происходит переход k-го депутата из i-й фракции в j-ю. Тогда получаем

$$L(t+1) = \left(S_i(t) - R_k\right)^2 + \left(S_j(t) + R_k\right)^2 + \sum S_n^2(t+1),$$

где n отлично от i и j. Раскрывая первые два квадрата, находим

$$L(t+1) = S_i^2(t) + S_j^2(t) + $$
$$+ 2R_k\left(R_k + S_j(t) - S_i(t)\right) + \sum S_n^2(t+1).$$

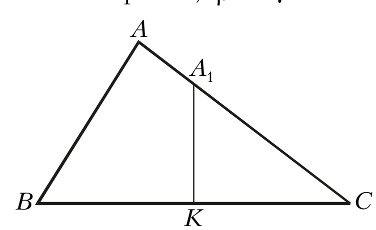
С учетом неравенства (*) устанавливаем $L(t+1) < L(t)$. Но функция L может принимать лишь конечное число значений, поэтому ее убывание не может продолжаться сколь угодно долго.

В.Ильичев

M1759. *Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной с и противолежащим ей углом γ. Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше с. Докажите, что $\gamma \ge 36°$.*

Рассмотрим треугольник ABC с длинами сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, причем $a \ge b \ge c$; углы при вершинах A, B и C обозначим соответственно через α, β и γ.

Пусть точка K – середина стороны BC, точка A_1 – пересечение серединного перпендикуляра к BC и стороны AC (см. рисунок).



Из условия задачи следует, что в указанной раскраске вершины B и C должны быть разного цвета, поскольку расстояние между ними больше c (если оно равно c, то треугольник равносторонний, и для него утверждение задачи выполняется). Значит, точка A_1 должна иметь одинаковый цвет с одной из точек B или C. В любом случае должно выполняться неравенство $AB \ge A_1C$, которое равносильно следующим неравенствам:

$$c \ge \frac{a}{2\cos\gamma}; \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \ge \frac{1}{2\cos\gamma};$$

$$\sin 2\gamma \ge \sin\alpha; \quad \alpha \le 2\gamma \le \pi - \alpha.$$