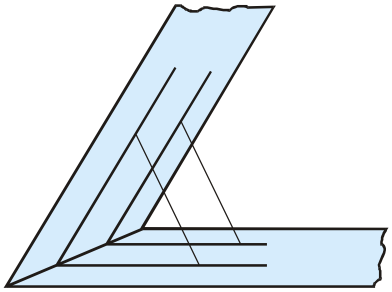

Рис.1

параллелограммов, изображенных на рисунке 2, и подумайте, как свести произвольный случай к разобранному.

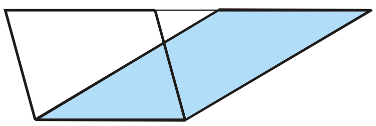

Рис.2

Пользуясь результатом упражнения 2, можно показать, что параллельная проекция сохраняет отношения площадей фигур, лежащих в одной плоскости. Для ортогональной проекции верен более сильный результат: отношение площади проекции к площади исходной фигуры равно косинусу угла между содержащими их плоскостями.

Следующей простейшей фигурой является угол. Оказывается, что даже при ортогональной проекции величина угла может подвергнуться весьма сильным искажениям. Так, из рисунка 3 видно, что если плоскость, в которой расположен угол, и плоскость проекции почти перпендикулярны, а перпендикуляр (CD) к линии их пересечения лежит внутри угла, то «очень острый» угол (ACB) может перейти в «очень тупой» $(A'CB')$.

Упражнение 3. Проведите вычисления, подтверждающие это утверждение.

В дальнейшем нам будет полезен следующий факт. Пусть плоские углы некоторого трехгранного угла равны a, b, c, а противолежащие им двугранные углы равны, соответственно, α, β, γ. Тогда

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma. \qquad (*)$$

Упражнение 4. Докажите эту формулу.

От угла естественно перейти к треугольнику. Пусть дан некоторый треугольник ABC. Выясним, как могут выглядеть треугольники, являющиеся его ортогональными проекциями. Результат оказывается довольно неожиданным.

Утверждение 1. *Любой треугольник может быть получен как ортогональная проекция треугольника, подобного ABC.*

Доказательство. Разберем случай, когда ΔABC правильный. Доказательство для общего случая аналогично.

Проведем через вершины данного треугольника $A'B'C'$ прямые a, b, c, перпендикулярные его плоскости (рис.4). Для доказательства утверждения достаточно найти на прямых a и b такие точки X и Y, что $C'X = C'Y$ и $\angle XC'Y = \pi/3$. Предположим для определенности, что $C'A' \ge C'B'$, и возьмем точку X, совпадающую с A', и точку Y, лежащую на прямой b выше плоскости $A'B'C'$, такую что $C'Y = C'A'$. Если $\angle A'C'Y > \pi/3$, будем двигать точки X и Y по соответствующим прямым вверх, соблюдая условие $C'X = C'Y$. Подняв обе точки достаточно высоко, можно сделать угол $XC'Y$ сколь угодно малым, а так как этот угол меняется непрерывно, в какой-то момент он примет требуемое значение. Если же $\angle A'C'Y < \pi/3$, будем двигать точку X вниз, а Y вверх. Тогда угол $XC'Y$ стремится к π и также в какой-то момент принимает требуемое значение. Положив теперь $X = A$, $Y = B$, $C' = C$, получаем, что треугольник $A'B'C'$ является проекцией правильного треугольника ABC.

Отметим, что утверждение 1 означает фактически, что для плоских фигур любое изображение, полученное посредством параллельной проекции, можно с точностью до подобия получить с помощью ортогональной.

Действительно, пусть проекциями трех не лежащих на одной прямой точек A, B, C являются точки A', B', C'. Проведем через произвольную точку D плоскости ABC прямые, параллельные AC и BC, и найдем точки X и Y их пересечения с BC и AC соответственно (рис.5). По свойствам параллельной проекции X и Y проектируются в такие точки X' и Y', что $C'X'/B'X' = CX/BX$, $C'Y'/A'Y' = CY/AY$, а точка D – в точку D' пересечения прямых, проходящих через X' и Y' и параллельных $C'A'$ и $C'B'$ соответственно. Таким образом, проекции всех точек плоскости ABC определяются однозначно. С другой стороны, утверждение 1 показывает, что три данные точки можно ортогонально спроектировать в вершины треугольника, подобного данному.

Однако при переходе к пространственным объектам возможности ортогональной и параллельной проекций оказываются существенно различными. Чтобы показать это, исследуем вопросы, связанные с изображением на плоскости одного из самых простых таких объектов — тетраэдра.

Проекции тетраэдра

Как правило, тетраэдр изображают на плоскости в виде четырехугольника, диагонали которого соответствуют двум противоположным ребрам тетраэдра, а стороны – остальным ребрам. Возникает естественный вопрос: какими свойства-

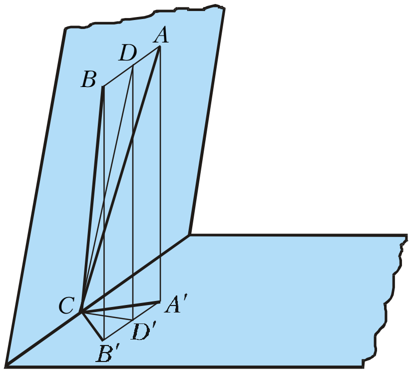

Рис.3

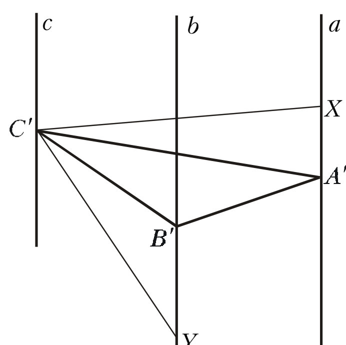

Рис.4

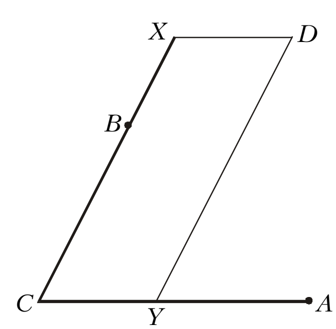

Рис. 5