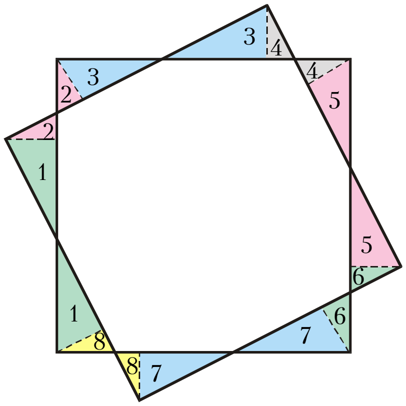

Рис. 2

12. Решим задачу в общем случае – найдем минимально необходимое число разрезов для квадрата размером $n \times n$ клеток. Рассмотрим сначала произвольный клетчатый прямоугольник. Разрезав его по любой линии сетки, мы получим два прямоугольника, у которых длина одной из сторон (той, вдоль которой шел разрез) одинакова. Длины вторых сторон могут и не совпадать. Но в любом случае получатся два прямоугольника, которые можно сложить так, что один поместится на другом, не выступая за его пределы, и при этом линии сетки совпадут. Поскольку такое наложение разрешено условием, то в дальнейшем вместе с разрезанием большего прямоугольника одновременно будет разрезан и меньший. Поэтому можно после очередного разреза *забыть* о меньшем из получившихся прямоугольников, ибо, наложив его на больший и в дальнейшем не снимая его, мы одновременно с разрезанием большего прямоугольника на единичные квадратики разрежем на такие же квадратики и меньший. Таким образом, задача свелась к следующей: квадрат размером $n \times n$ разрезаем по линиям сетки и после каждого разреза меньшую из частей отбрасываем (если они одинаковы – то любую). Требуется за наименьшее число разрезов «добраться» до квадрата размером 1×1.

Расположим исходный квадрат так, чтобы одна из его сторон была горизонтальна, а другая вертикальна, и после очередного разреза и отбрасывания меньшей части большую часть не будем трогать, сохраняя ее ориентацию. Заметим, что при любых разрезаниях вдоль горизонтали меняется лишь высота оставшейся части прямоугольника, а при любых разрезах вдоль вертикали меняется лишь его ширина. Значит, разрезы по вертикали и горизонтали *независимы*, и их порядок на итоговый размер «остатка» не влияет. Поэтому мы можем сначала произвести все необходимые горизонтальные разрезы, получив из квадрата $n \times n$ горизонтальную полоску размером $1 \times n$, а затем вертикальными разрезами получим из нее квадратик 1×1.

Выясним, какое потребуется наименьшее количество горизонтальных разрезов. После каждого разреза высота прямоугольника-«остатка» уменьшается не более чем вдвое. Поэтому если k – такое натуральное число, что $2^{k-1} < n \le 2^k$, то наверняка потребуется не менее k разрезов. Покажем, что k разрезов и достаточно. Первым разрезом отрежем прямоугольник высотой 2^{k-1}. Второй получившийся в результате разреза прямоугольник будет иметь высоту $n - 2^{k-1} \le 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$, т.е. его высота не превышает высоту первого. Значит, отбрасываем второй, так как он – меньший. В дальнейшем все разрезы проводим, деля высоту точно пополам. Тогда после второго разреза высота станет равна 2^{k-2}, после третьего – 2^{k-3}, …, после k-го – $2^{k-k} = 2^0 = 1$, что и требуется.

Очевидно, столько же потребуется и вертикальных разрезов, а всего, таким образом, нужно сделать $2k$ разрезов. Это и есть ответ для произвольного n.

Так как $2^{10} < 1111 \le 2^{11}$, то k = 11, и для разрезания данного квадрата на единичные квадратики потребуется как минимум $2 \cdot 11 = 22$ разреза.

13. Пусть n – наибольшее число колонок, которые можно установить при заданных условиях. Суммарное количество улиц, выходящих из перекрестков, на которых установлены колонки, не меньше $4n$. Поскольку среди перекрестков нет соседних, то все эти улицы различные, поэтому $162 \ge 4n$. Отсюда $n \le 40$.

14. а) Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k 0 \ldots 0}$, где $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – цифры, причем $a_n \ne 0$, $a_k \ne 0$, $n \ge k \ge 1$. В частном случае a_k может быть ненулевой цифрой, стоящей в разряде единиц, тогда нули справа в записи числа A отсутствуют. Если взять число $B = 10^m - 1$, где $m \ge n$, то сумма цифр произведения $AB = A \cdot 10^m - A$ равна $9m$. Чтобы убедиться в этом, произведем вычитание в столбик и с учетом поразрядного переноса получим

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_k - 1 + 9 + \ldots + 9 - a_n + 9 - a_{n-1} + \ldots + 10 - a_k = 9m.$$

б) Сначала построим десять последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 2000, второе – на 2001, …, десятое – на 2009.

Пусть $A = 2000 \times 2001 \times \ldots \times 2009$, тогда требуемым свойством обладают числа AB + 2000, AB + 2001, …, AB + 2009, где B – некоторый вспомогательный натуральный множитель. Если бы удалось подобрать число B таким образом, чтобы сумма цифр числа AB равнялась 1998, то задача была бы решена. Поскольку $1998 = 9 \cdot 222$, то, по доказанному в п.а), достаточно взять $B = 10^{222} - 1$ (число 222 превышает количество цифр в числе A, поскольку $A < (10000)^{10} = 10^{40}$).

15. Обозначим через x, y числа, задуманные Труляля, а через a, b – числа, задуманные Траляля. Тогда

$$\begin{cases} x + y = ab, \\ a + b = xy. \end{cases}$$

Таким образом, натуральные числа x, y – корни уравнения $z^2 - abz + (a + b) = 0$, дискриминант которого $D = (ab)^2 - 4(a + b)$ должен быть квадратом целого числа. Без ограничения общности полагаем $b \ge a$.

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть a = 1, тогда $D = (b - 2)^2 - 8 = t^2$, где t – натуральное (очевидно, $D \ne 0$). Отсюда $(b - 2 - t)(b - 2 + t) = 8$, что возможно в одном из двух случаев:

$$\begin{cases} b - 2 + t = 8, \\ b - 2 - t = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 2 + t = 4, \\ b - 2 - t = 2. \end{cases}$$

Первая из этих систем целых решений не имеет; решение второй системы: b = 5; t = 1. Итак, одно из решений задачи: a = 1; b = 5. В этом случае неизвестные x, y составляют множество значений $\{2; 3\}$.

Аналогично, при a = 2 получаем b = 3 или b = 2; этим случаям соответствуют ответы $\{1; 5\}$ и $\{2; 2\}$. Разбор случаев a = 3, a = 4, $a \ge 5$ показывает, что при этих значениях a дискриминант на является квадратом целого числа.

Ответ: Труляля мог задумать либо числа $\{1; 5\}$, либо числа $\{2; 3\}$, либо числа $\{2; 2\}$. Соответственно, Траляля мог задумать либо числа $\{2; 3\}$, либо числа $\{1; 5\}$, либо числа $\{2; 2\}$. Других решений нет.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. При наличии трения часть механической энергии переходит во внутреннюю тепловую энергию тел.

2. Слабо накачанная шина деформируется в большей степени, поэтому ее внутренняя энергия, а значит, и температура, возрастут больше, чем у сильно накачанной шины.

3. На совершение работы против силы сопротивления воздуха и внутренних сил трения во вращающихся частях автомобиля.

4. Частицы покоятся друг относительно друга, т.е. движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями.