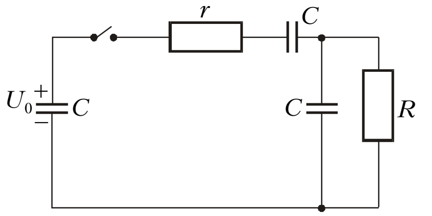


Рис.5

ре сопротивлением r? Какое количество теплоты выделится в нем за последующие 100 секунд? Элементы цепи считать идеальными.

А.Старов

Ф1786. На рисунке 6 приведена схема, собранная из катушки индуктивностью 1 Гн, конденсатора емкостью 1 мкФ, идеального амперметра и двух резисторов сопротивлениями по 100 Ом. Схема подключена к источнику переменного напряжения $U = 100\cos 1000t$. Найдите показания амперметра.

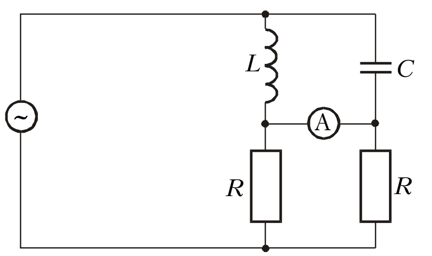


Рис.6

З.Рафаилов

Ф1787. Плоская световая волна, ее длина волны 0,55 мкм соответствует зеленому цвету, падает перпендикулярно на плоский непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. На расстоянии 0,2 м находится лист бумаги, расположенный параллельно экрану. При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность в самой близкой к центру отверстия точке листа бумаги? При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность этой точки одновременно для длин волн 0,4 мкм и 0,7 мкм?

А.Зильберман

Решения задач М1751—М1755, Ф1763—Ф1772

М1751. *Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с k городами другой, причем из любого города этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. (Города одной страны рейсы этой авиакомпании не соединяют.) Из-за финансового кризиса пришлось закрыть один рейс. Докажите, что теперь по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.*

Зададим города каждой страны точками. Если два города соединены авиарейсом, то соответствующие им точки соединим линией. Из каждой точки получившейся схемы (графа) будут выходить ровно k линий. Поскольку из каждого города можно долететь в любой другой, то $k \ge 2$. Предположим, что после отмены одного рейса из какого-то города невозможно попасть в некоторый другой. Это эквивалентно существованию в построенном графе линии, удаление которой приводит к тому, что граф распадется на две части. Рассмотрим одну из них. Пусть в ней p_1 точек соответствуют городам первой страны, p_2 – городам второй страны, а удаленная линия выходит из точки, соответствующей городам первой страны. Тогда из точек, соответствующих городам первой страны, выходит (p_1k-1) линий, а из точек, соответствующих городам второй страны, p_2k линий. Поскольку это одни и те же линии, то $p_1k-1=p_2k$. Последнее равенство невозможно, так как его правая часть делится на k, а левая нет. Поэтому наше предположение о существовании такого рейса ошибочно.

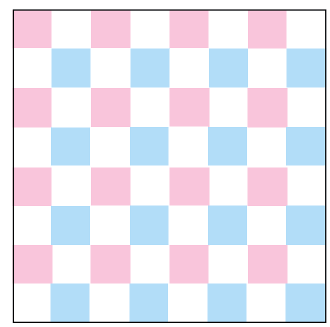
О.Мельников

М1752. *Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?*

Ответ: 24^2.

Если не выдвигать ограничений на цвет полей, то 8 ладей допустимым образом можно расставить 8! различными способами; вообще для доски размером $n \times n$ число способов расстановки n ладей равно числу перестановок из n элементов, т.е. $n!$.

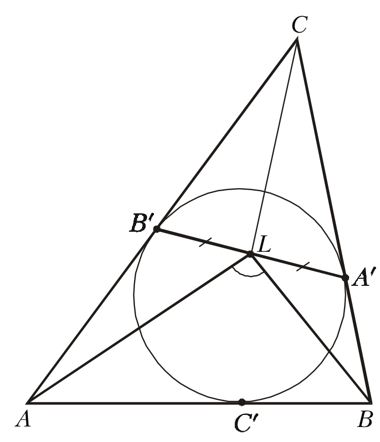
Но нам нужно учесть ограничение на цвет полей: ладьи расставляются только на черных полях доски. Перекрасим черные поля доски в красный и синий цвета. При этом всякое черное поле, расположенное на нечетной вертикали (но на четной горизонтали), сделаем красным, а всякое черное поле, расположенное на четной вертикали (но на нечетной горизонтали), сделаем синим (см. рисунок). Из 8 ладей, стоящих допустимым образом на черных полях, 4 ладьи окажутся на красных полях, а остальные 4 ладьи – на синих.



Красные поля образуют как бы отдельную шахматную доску размером 4×4, поэтому число способов расстановки 4 ладей на красных полях равно 4! = 24. То же можно сказать о синих полях. В результате число способов для допустимых расстановок 8 ладей равно 24^2.

В.Произволов

М1753. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C', точка L – середина отрезка $A'B'$ (см. рисунок). Докажите, что угол ALB – тупой.*



Введем обычные обозначения: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, p – полупериметр ΔABC.

Так как $CA' = CB' = p - c$ и CL – биссектриса угла C, $CL = (p-c)\cos(C/2)$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ACL и BCL, получим

$$AL^2 = b^2 + (p-c)^2\cos^2(C/2) - 2b(p-c)\cos^2(C/2),$$

$$BL^2 = a^2 + (p-c)^2\cos^2(C/2) - 2a(p-c)\cos^2(C/2),$$

$$AL^2 + BL^2 - c^2 = 2\left(ab\cos C - p(p-c)\cos^2(C/2)\right) =$$

$$= 2\left(ab - p(p-c) - ab\,\mathrm{tg}^2(C/2)\right)\Big/\left(1 + \mathrm{tg}^2(C/2)\right).$$