стые числа или хотя бы некоторую их последовательность и ни одного составного. Над этой проблемой думал и Ферма. В процессе поиска он пришел к формуле

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Почему он выбрал такой сложный показатель, понятно: число $2^s + 1$ при $s \neq 2^n$ (т.е. когда s содержит нечетный сомножитель) всегда составное. (Докажите это.)

В письме (1654) Паскалю Ферма писал: «Последовательное квадрирование двух при увеличении на единицу всегда простое число – это свойство, за истинность которого я ручаюсь». Но здесь интуиция его подвела. Хотя числа F_n при $n = 0$, 1, 2, 3, 4 простые, уже число F_5, как позже нашел Эйлер, делится на 641. Более того, среди следующих чисел F_n до сих пор не найдено ни одного простого. Числа F_n получили название *чисел Ферма*. Легко показать (сделайте это), что при $n > 1$ все они оканчиваются семеркой.

Кажется, о числах F_n можно было бы благополучно забыть, ведь они не сыграли предназначенной им роли. Но, как и другие результаты Ферма, они тоже нашли свое место в математике. Через полтора века К.Гаусс доказал теорему: *окружность можно разделить на N равных частей с помощью циркуля и линейки лишь в том случае, когда N имеет вид*

$$N = 2^k p_1 p_2 \ldots p_m,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – различные между собой простые числа Ферма.

Из этой теоремы следует, например, что на 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 равных частей разделить окружность можно, а на 7, 9, 11, 13, 14 частей – нельзя.

Занимаясь проблемой делимости чисел, Ферма нашел способ разложения любого натурального нечетного числа N на два сомножителя. Метод очень простой. Подбирается наименьшее число n, квадрат которого больше N. Тогда $N = n^2 - n_1$. Если $n_1 = m^2$, то разложение найдено: $N = (n-m)(n+m)$. Если же n_1 не является квадратом, то вместо n берется $n + 1$ и число N представляется в виде $N = (n-1)^2 - n_2$. Если вновь n_2 не является квадратом, то вместо $n + 1$ испытывают последовательно числа $n + 2$, $n + 3$ и т.д. Читатели могут доказать, что данный метод всегда приводит к решению (в случае простого N придется считать до тех пор, пока число $n + k$ не станет равным $(N+1)/2$). Приведем примеры:

$$323 = 18^2 - 1 = 19 \cdot 17,$$

$$697 = 27^2 - 32 = 28^2 - 87 = 29^2 - 12^2 = 41 \cdot 17,$$

$$13 = 4^2 - 3 = 5^2 - 12 = 6^2 - 23 = 7^2 - 6^2 = 13 \cdot 1.$$

Важную роль в теории делимости играет Малая теорема Ферма: *если p простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p*. Это замечательное свойство впервые было изложено Ферма в письме (1640) к Б.Френиклю. Через полвека немецкий математик и философ Г.Лейбниц дал доказательство этой теоремы, позже Эйлер обобщил ее на случай составного p.

Но если Малую теорему знают люди, связанные с математикой, то Большая известна любому дилетанту. На полях диофантовой «Арифметики» напротив того места, где Диофант поставил задачу о представлении квадрата натурального числа в виде суммы двух квадратов, Ферма написал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки». Так родилась Большая, или Великая теорема Ферма: *уравнение*

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет натуральных решений при $n > 2$.

Можно лишь сожалеть по поводу размера полей диофантовой «Арифметики», поскольку решения Ферма мы не знаем. Может быть, оно на самом деле было очень оригинальным, и никто другой до него не додумался, а может быть, оно содержало ошибку. Недаром такой задачи Ферма не ставил своим корреспондентам, хотя частный ее случай для $n = 4$, правда в иной форме, он предлагал. Речь идет об утверждении: *не существует прямоугольного треугольника с целочисленными длинами сторон, площадь которого является квадратом*. Доказательство Ферма последнего утверждения имеется на полях все той же «Арифметики». Оно достаточно сложное, и мы его приводить не станем, скажем лишь, что Ферма использовал *метод бесконечного спуска*, который он изобрел и которым очень гордился.

Суть метода заключается в следующем: если из предположения, что некоторое натуральное число обладает данными свойствами, следует существование меньшего натурального числа с теми же свойствами, то никакое натуральное число не может обладать этими свойствами. Как признавался Ферма в своем письме (1659) к Каркави, все теоремы в теории чисел он доказал с помощью этого метода.

Больше трех веков лучшие умы человечества бились над доказательством Великой теоремы Ферма. В процессе поиска решения было сделано много открытий и проложены новые направления в математике, что и дало повод называть теорему *Великой*. Лишь в конце XX столетия были разработаны чрезвычайно сложные средства, которые позволили положительно решить данную проблему. Последнюю точку поставил (1995) американский математик Э.Уайлс. Это последняя из задач Ферма, которая долгое время не была решена и которая все-таки поддалась усиленному натиску математиков. Поэтому ее называют также *Последней* теоремой Ферма.

В заключение приглашаем читателей еще раз обратиться к известному портрету Ферма. Он в судейской мантии; благородное лицо; умные, проницательные глаза; спокойный, доброжелательный взгляд человека, находящегося в полной гармонии с самим собой и окружающим миром. Таким передал нам художник облик Пьера Ферма – одного из лучших юристов своего времени и одного из самых выдающихся математиков всех времен.