Варианты / Партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B	B	B	B	A	B
2	A	A	A	B	A	A	B	A	B	A	B	B	B	A	B	B
3	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B	A	B	B	B
4	A	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	B	B	B	B
выигрыш ставки	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B

придворных Людовика XIV, страстный игрок в кости. Поэтому задачу часто называют задачей де Мере, хотя она не была новой – ее решал еще итальянский математик Л.Пачоли в XV в.

Все ученые, которые занимались этой задачей раньше, делили ставку пропорционально выигранным партиям, т.е. считали, что течение игры определилось ее началом и дальнейший ход не изменит сложившейся картины. Паскаль использовал совершенно иной подход. Он исходил из числа партий, оставшихся каждому игроку до полного выигрыша, считая выигрыш в каждой партии любого игрока равновозможным. Похоже, никто из ближайшего окружения не смог по достоинству оценить его решение, и тогда Паскаль послал (1654) его на суд Ферма: «...Я хочу поделиться с Вами своими рассуждениями, и Вы мне окажите милость: скажите мне, если я ошибаюсь, или согласитесь со мною, если я прав. Я Вас об этом прошу откровенно и искренне, так как я чувствую себя уверенно, только когда Вы на моей стороне».

Ферма заинтересовался задачей и в ответном письме предложил свое решение, рассмотрев случай, когда до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B – трех партий. Ясно, что будет сыграно не более четырех партий. Ферма составил таблицу всех возможных вариантов исходов этих партий. Приведем ее, обозначив буквой A в таблице выигрыш игрока A, а буквой B – выигрыш игрока B.

Лишь в вариантах 9–11 и 13–15 будут сыграны все 4 партии, в остальных игра закончится раньше. Но Ферма подчеркивал, и Паскаль разделял его точку зрения, что и такие варианты надо просчитывать до конца. Из таблицы видно, что ставка должна делиться в отношении 11:5.

Методом Ферма можно решить задачу для любого числа оставшихся партий и даже при условии, что в игре участвуют более двух игроков.

Получив решение Ферма, Паскаль в следующем письме отвечает: «Я восхищен Вашим методом для партий, тем более что я хорошо понимаю, что он полностью Ваш, ничего общего не имеет с моим и легко приводит к тому же результату». В возникшей переписке был обсужден ряд вопросов, связанных со случайными событиями. Фактически в ней и зародилась теория вероятностей, появились первые ее понятия. Правда, в письмах не было слова «вероятность», а речь шла лишь о числе благоприятных исходов или, в крайнем случае, о его отношении к числу всех исходов, но ведь дело не в названии!

Кроме того, Ферма и Паскаль своей перепиской привлекли внимание ученых к этой новой области математики. Достаточно сказать, что молодой нидерландский ученый Х.Гюйгенс, приехавший в Париж в 1655 г. и узнавший о переписке, заинтересовался проблемой и уже через два года опубликовал работу «О расчете в азартных играх» – по существу первое исследование по теории вероятностей.

Теория чисел

К теории чисел Ферма питал особую любовь. Увлекшись задачами диофантовой «Арифметики», он обобщал их и ставил новые. Получая тот или иной результат, он посылал своим корреспондентам соответствующие задачи. В это время были приняты такие заочные математические состязания. Каждый ученый, получивший задачу, стремился решить ее побыстрее и наиболее изящным способом. Задачи Ферма, часто не поддававшиеся усилиям современников, в основном определили главные пути развития теории чисел в течение последующих столетий.

В 1657 г. для привлечения внимания к теории чисел Ферма отправил английским математикам вызов: найти бесконечную последовательность натуральных решений уравнения

$$ax^2 + 1 = y^2 \qquad (*)$$

при $a = 109, 149, 433$. У этого уравнения интересная история, начало которой теряется в глубине веков. Похоже, его умел решать еще Архимед – ведь он предложил Эратосфену «задачу о быках Солнца», которая сводится к такому уравнению при чудовищно большом значении a. Интерес к уравнению (*) объясняется тем, что любое уравнение второй степени с двумя неизвестными и рациональными коэффициентами рациональной заменой переменных сводится к уравнению $ax^2 + b = y^2$ с целыми коэффициентами. Оказывается, если оно имеет хотя бы одно натуральное решение, то их у него бесконечное множество, и все они получаются из решений уравнения (*). Английские математики справились с задачей, правда, не доказав, что их метод всегда приводит к успеху. Каково было решение самого Ферма, мы не знаем. Только в следующем веке Л.Эйлер показал, что если (x_0, y_0) – наименьшее решение уравнения (*), то все его остальные решения (x_n, y_n) имеют вид

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\left(y_0 + x_0\sqrt{a}\right)^{n+1} - \left(y_0 - x_0\sqrt{a}\right)^{n+1}\right),$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left(\left(y_0 + x_0\sqrt{a}\right)^{n+1} + \left(y_0 - x_0\sqrt{a}\right)^{n+1}\right),$$

а французский математик Ж.Лагранж доказал (1769) существование наименьшего решения, а значит, и бесконечного множества решений.

Известно, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения простых чисел, т.е. простые числа служат как бы кирпичиками, из которых составляются натуральные, – поэтому интерес к простым числам в математическом мире всегда был велик. С давних пор ученые пытались найти формулу, дающую все про-