луча l_i в сторону луча M_iM_{i+1} с учетом направления вращения, поэтому

$$\Delta_i\theta = \pi - \alpha_i < 0. \qquad (2)$$

2) Пусть отрезок M_iM_{i+1} располагается по левую сторону от $M_{i-1}M_i$. В этом случае $0 < \alpha_i < \pi$ (рис.18). Снова продолжим $M_{i-1}M_i$ за точку M_i как луч с началом в M_i; и снова угол вращения касательной к дуге окружности равен ориентированному углу между лучом l_i и лучом M_iM_{i+1}, т.е.

$$\Delta_i\theta = \pi - \alpha_i > 0. \qquad (3)$$

3) Сторона M_iM_{i+1} является продолжением стороны $M_{i-1}M_i$. Тогда угол α_i равен π, а вращение касательной равно нулю, поэтому в таких вершинах M_i можем записать:

$$\Delta_i\theta = \pi - \alpha_i = 0. \qquad (4)$$

На тех участках кривой L, которые идут по отрезкам сторон многоугольника P, вращения касательной нет вовсе, поэтому весь поворот касательной к L складывается из суммы ее поворотов на дугах окружностей Γ_i. Следовательно, взяв для каждого i соответствующие уравнения (2), (3) или (4) и сложив их,

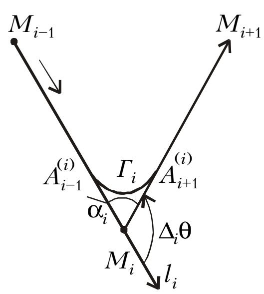

Рис.18

получаем $2\pi Ind_L = \pi n - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$. Кроме того, видно, что Ind_L не зависит от выбора малых окружностей Γ_i, с использованием дуг которых была построена кривая L, поэтому общее значение индексов всех кривых L мы можем назвать индексом самого данного многоугольника P и обозначать его как Ind_P. В итоге имеем искомую формулу

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \pi(n - 2Ind_P). \quad (5)$$

Если же мы будем вычислять сумму углов, лежащих *справа* по направлению обхода многоугольника, то она, очевидно, будет равна $\pi(n + 2Ind_P)$, и вместе с суммой внутренних углов получаем $2\pi n$, как и должно быть.

Как вычислять индекс кривой?

На первый взгляд в формуле (5) мало пользы: ведь вычисление индекса многоугольника сводится в свою очередь к нахождению ориентированных углов в вершинах M_i между продолжением стороны $M_{i-1}M_i$ и стороной M_iM_{i+1}, а их вычисление – задача такой же трудности, что и нахождение углов α_i.

Однако, оказывается, существует возможность вычисления индекса многоугольника даже без знания его углов. Для этого введем понятие *степени отображения* кривой на окружность. Пусть дана некоторая замкнутая ориентированная кривая L и пусть $\Phi: L \to \Gamma$ – некоторое непрерывное отображение кривой L на положительно ориентированную окружность Γ. Пусть кривая L и окружность Γ представлены как объединение конечного числа дуг $L_1, \ldots, L_k$ и, соответственно, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ (рис.19), таких, что каждая дуга L_i, $1 \le i \le k$, отображением Φ переводится или в концевую точку одной из дуг γ_j или гомеоморфно (т.е. взаим-

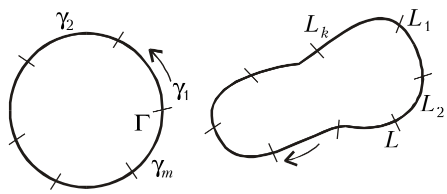

Рис.19

но однозначно и непрерывно в обе стороны) отображается на одну из дуг γ_j. Если, во втором случае, отображение Φ переводит дугу L_i в дугу γ_j с сохранением (изменением) направления обхода, то говорят, что степень отображения Φ на дуге L_i равна +1 (соответственно, −1).

Возьмем теперь некоторую точку M^* на окружности, не являющуюся концевой точкой ни одной из дуг γ_j. Пусть $M_1, \ldots, M_s$, $1 \le s \le k$, – существующие на L прообразы точки M^*, т.е. точки, переводимые отображением Φ в M^*. На каждой из дуг кривой L, где лежат точки $M_1, \ldots, M_s$, степень отображения Φ известна; пусть на p из них она равна +1, а на $q = s - p$ дугах она равна −1. Тогда число $p - q$ называется *степенью отображения* Φ кривой L. Если же на L нет ни одного прообраза точки M^*, то степень отображения Φ считается равной нулю.

Основная проблема состоит, конечно, в доказательстве корректности этого определения, т.е. в том, чтобы доказать, что степень отображения не зависит ни от разбиения кривой L и окружности Γ на дуги, ни от выбора точки M^*. Оказывается, это действительно так. Пусть M_0 – некоторая точка на L, с которой мы начинаем обход, и пусть M_1 – первый прообраз точки M^*, встретившийся по направлению обхода L. Пусть для определенности точка M^* расположена в первой четверти и пусть степень отображения Φ в окрестности точки M_1 равна +1, тогда переход вектора $\Phi(M)$ на окружности Γ через M^* происходит против часовой стрелки и угол θ между осью Ox и вектором $\Phi(M)$ растет (образ точки $M \in L$ пересекает точку M^* «снизу вверх»). Затем вектор $\Phi(M)$ пересекает точку M^* во второй раз в следующем прообразе $M_2 \in L$. Если и в этот раз степень отображения равна +1, то угол θ окажется выросшим на 2π, так как вектор $\Phi(M)$ подойдет к M^* опять «снизу», начав движение с точек «выше» M^* и ни разу до этого не пересекая M^*, т.е. он сделает полный обход окружности; если же степень равна −1, то весь прирост угла исчезнет, так как точка $\Phi(M)$ придет к M^* «сверху», так что угол вернется к исходному значению. Вообще, каждый прирост угла θ за счет перехода через M^* против часовой стрелки аннулируется переходом вектора $\Phi(M)$ через M^* в направлении часовой стрелки. Следовательно, если какой-либо переход через M^* против часовой стрелки не аннулируется переходом через M^* по часовой стрелке, то угол θ при подходе $\Phi(M)$ к M^* окажется возросшим на 2π и в итоге полное приращение $\Delta\theta$ этого угла окажется равным $2\pi(p - q)$, где p – число прообразов со степенью отображения +1 и одновременно число переходов через M^* против часовой стрелки, а q – аналогичное число для степеней −1 и переходов по часовой стрелке. А число $\dfrac{\Delta\theta}{2\pi} = p - q$ есть не что иное, как вращение векторного поля $\Phi(M)$ вдоль L, следовательно, оно не зависит от выбора точки $M^* \in \Gamma$ и от чисел p и q, а зависит только от их разности, которая, таким образом, оказывается одинаковой при любом выборе M^*.