вая в каждой своей точке имеет касательную прямую, непрерывно изменяющуюся при движении точки вдоль кривой. Пусть кривая замкнутая и пусть указано направление ее обхода. Построим в каждой ее точке единичный касательный вектор, направленный в сторону обхода кривой (рис.10). Затем построим отоб-

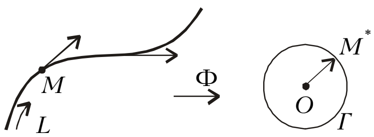

Рис.10

ражение Φ этой кривой на единичную окружность Γ по следующему закону: возьмем на L произвольную точку M и перенесем касательный к L вектор из точки M параллельно самому себе в центр O окружности Γ, тогда конец перенесенного вектора попадет в некоторую точку $M^* \in \Gamma$. Таким образом, если проделать это построение для всех точек кривой L, то получим искомое отображение $\Phi: L \to \Gamma$. При движении точки M вдоль кривой L в заданном направлении ее обхода вектор $\overrightarrow{OM^*}$ перемещается вдоль окружности с непрерывным изменением угла θ между вектором и осью Ox. Выберем некоторую начальную точку M_0 обхода кривой L и некоторое начальное значение θ_0 угла между вектором $\overrightarrow{OM_0^*}$ и осью Ox (этот угол определяется с точностью до целократного 2π). Затем, непрерывно перемещая точку M вдоль кривой L в направлении ее обхода вместе с касательным к L вектором, будем получать новые *непрерывно* изменяющиеся значения θ угла между вектором $\overrightarrow{OM^*}$ и осью Ox. Разность $\theta - \theta_0$ обычно обозначается $\Delta\theta$ и называется приращением угла θ. После возвращения точки M в исходное положение M_0 вектор $\overrightarrow{OM^*}$ тоже вернется в исходное положение; новое значение $\tilde{\theta}_0$ угла θ, к которому мы пришли после завершения обхода, будет связано с прежним его значением равенством $\Delta_L\theta = \tilde{\theta}_0 - \theta_0 = 2\pi k$ (значок L подчеркивает, что движение происходит вдоль кривой L), где k – некоторое целое число. Оно и называется *индексом* кривой L, или *вращением* поля касательных к L, с обозначением $k = Ind_L$. Это число является

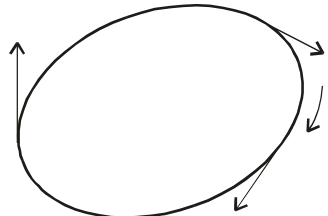
Рис.11

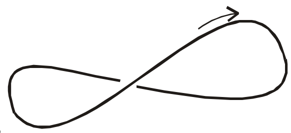
Рис.12

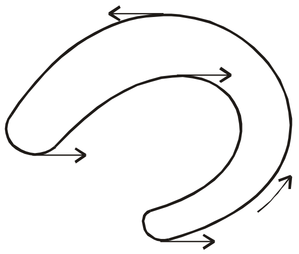
Рис.13

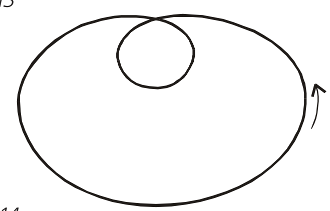
Рис.14

одной из важнейших характеристик кривой «в целом». Оно показывает, сколько оборотов «в конечном счете» сделает касательная при полном обходе вдоль кривой. На рисунках 11, 12, 13 и 14 изображены кривые с индексами $Ind = -1$, $Ind = 0$, $Ind = 1$ и $Ind = 2$ соответственно. Заметьте, что на рисунке 13 касательная трижды принимает положение «горизонтально направо» и соответственно имеет такие положения, когда угол между ней и осью Ox больше 2π, тем не менее окончательное значение угла $\theta = 2\pi$, так как касательная в ходе своего вращения возвращается к меньшим значениям угла.

В точках $M \in L$ вместо векторов, касательных к L, можно взять любые другие единичные векторы и аналогичным образом определить вращение этого нового векторного поля вдоль L.

Формула для суммы углов

Теперь мы готовы к выводу искомой формулы для суммы углов многоугольника. Рассмотрим произвольную вершину M_i, при которой угол $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ не является развернутым. Впишем в угол $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ круговую дугу Γ_i некоторого малого радиуса (выпуклостью в сторону вершины M_i); пусть $A_{i-1}^{(i)}$ и $A_{i+1}^{(i)}$ – точки ее касания со сторонами $M_{i-1}M_i$ и M_iM_{i+1} соответственно. Заменим в многоугольнике P около каждой точки M_i ломаную $A_{i-1}^{(i)}M_iA_{i+1}^{(i)}$ дугой $A_{i-1}^{(i)}A_{i+1}^{(i)}$. Малость радиусов дуг Γ_i подберем так, чтобы после такой замены от каждой стороны M_iM_{i+1} остался отрезок $A_{i+1}^{(i)}A_i^{(i+1)}$, обходимый в том же направлении, что и сторона M_iM_{i+1} (рис.15). В итоге получится гладкая кривая, состоя-

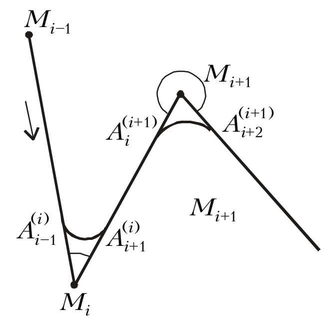

Рис.15

щая из частей сторон многоугольника P и дуг окружностей (рис.16). Обозначим эту кривую через L. По-

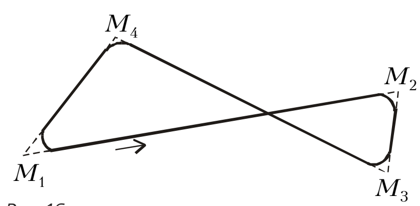

Рис.16

смотрим, на какой угол поворачивается ее касательная около каждой точки M_i. Пусть α_i – введенный выше угол при вершине M_i. Рассмотрим три возможных случая.

1) Отрезок M_iM_{i+1} располагается в правой полуплоскости от линии стороны $M_{i-1}M_i$ (рис.17). Продолжим сторону $M_{i-1}M_i$ по прямой за точку M_i как луч l_i с началом в M_i; тогда угол поворота $\Delta_i\theta$ касательной к дуге $A_{i-1}^{(i)}A_{i+1}^{(i)}$ окружности Γ_i при обходе этой дуги равен ориентированному углу кратчайшего поворота

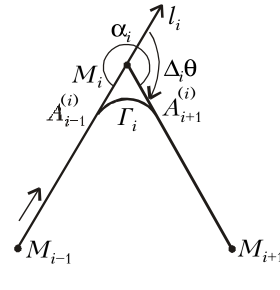

Рис.17