Нагревать или сообщать количество теплоты?

Н.КОРЖОВ

Как соотносятся между собой понятия «нагревание тела» и «сообщение телу количества теплоты»?

Нагревание – это повышение температуры тела. Температура T есть параметр состояния системы, находящейся в термодинамическом равновесии, а внутренняя энергия U – функция состояния. Это означает, что в данном состоянии система обладает определенными температурой и внутренней энергией, которые не зависят от того, каким образом система приведена в это состояние. Это – экспериментальный факт.

Переход системы из одного состояния в другое происходит в результате теплообмена или совершения механической работы. Поэтому количество теплоты Q, как и работа A над системой (или работа A' системы над внешними телами), связано не с внутренней энергией системы, а с ее приращением. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$\Delta U = Q + A \text{ или } Q = \Delta U + A'.$$

Таким образом, сообщение телу некоторого количества теплоты вовсе необязательно ведет к его нагреванию. Приведем примеры. Веществу, нагретому до температуры плавления, для плавления требуется определенное количество теплоты, хотя температура при плавлении будет оставаться неизменной. При изотермическом расширении температура газа остается одной и той же, хотя к газу подводится тепло. В первом случае тепло идет не на изменение средней кинетической энергии хаотического движения молекул вещества, мерой которого и является температура, а на изменение потенциальной энергии их взаимодействия. Во втором случае все тепло идет на совершение газом работы над внешними телами.

Далее, передача одного и того же количества теплоты двум системам, находящимся в совершенно одинаковых начальных состояниях, может привести к их различному нагреванию. Например, при сообщении идеальному газу в цилиндре под подвижным поршнем некоторого количества теплоты он нагреется меньше, чем тот же газ, но под неподвижным поршнем. Это происходит потому, что при изобарном нагревании передаваемое газу тепло идет не только на увеличение его внутренней энергии, но и на совершение им работы, в то время как при изохорном нагревании – только на увеличение его внутренней энергии.

Нагреть вещество, т.е. повысить его температуру, можно и не сообщая ему количества теплоты, а совершив над ним работу – например, потерев монету о сукно или быстро сжав газ насосом. Наконец, бывает и так, что телу сообщают тепло, а оно охлаждается. Соответствующий пример приведем попозже, а пока заметим, что возможность такого случая следует из первого закона термодинамики. Так, применительно к идеальному газу при $A' > Q$ из соотношения $Q = \Delta U + A'$ следует, что $\Delta U < 0$, т.е. $T_2 < T_1$ (для идеального газа U прямо пропорционально T).

А сейчас проанализируем следующую конкретную ситуацию. Пусть ν молей идеального одноатомного газа переводят из состояния *1* в состояние *2* так, как это показано на рисунке 1.

Сначала найдем уравнение процесса. Поскольку зависимость p от V линейная, можно записать

$$p = aV + b. \qquad (1)$$

Из уравнений

$$p_1 = aV_1 + b \text{ и } p_2 = aV_2 + b$$

найдем постоянные a и b:

$$a = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1},\ b = \frac{p_1V_2 - p_2V_1}{V_2 - V_1}.$$

Очевидно, что $a < 0$, $b > 0$.

С помощью уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$ выразим температуру газа T через его объем:

$$T(V) = \frac{aV^2 + bV}{\nu R}.$$

Максимальная температура в данном процессе будет достигнута при объеме

$$V' = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\frac{p_1V_2 - p_2V_1}{p_1 - p_2}. \qquad (2)$$

Теперь найдем количество теплоты, переданное газу с начала процесса, как функцию от объема, используя первый закон термодинамики в форме $Q = \Delta U + A'$. Зафиксируем какой-то объем газа V. Работа расширения газа от объема V_1 до объема V равна пло-

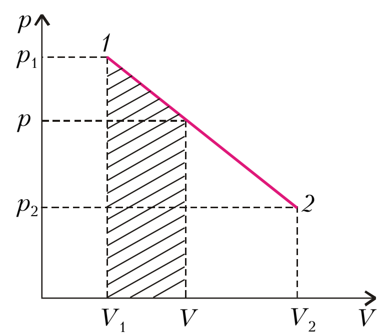

Рис. 1

щади соответствующей трапеции (заштрихованной на рисунке 1):

$$A'(V) = \frac{p_1 + p}{2}(V - V_1),$$

или, учитывая уравнение процесса,

$$A'(V) = \frac{a}{2}V^2 + \frac{p_1 - aV_1 + b}{2}V - \frac{p_1 + b}{2}V_1.$$

Изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_1) = \frac{3}{2}aV^2 + \frac{3}{2}bV - \frac{3}{2}p_1V_1.$$

Таким образом,

$$Q(V) = \Delta U + A'(V) = 2aV^2 + \frac{p_1 - aV_1 + 4b}{2}V - \frac{4p_1 + b}{2}V_1.$$

Так как $2a < 0$, функция $Q(V)$ достигает максимального значения при объеме

$$V^{\&} = -\frac{p_1 - aV_1 + 4b}{8a} = \frac{5}{8}\frac{p_1V_2 - p_2V_1}{p_1 - p_2}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что при $V_1 < V < V^{\&}$

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 31)

газ получал тепло, а при $V^{\&} < V < V_2$ отдавал.

Сравнивая выражения (2) и (3), видим что $V' < V^{\&}$, откуда сразу можно сделать вывод: сообщение газу некоторого количества теплоты не означает, что газ будет обязательно нагреваться, т.е. что его температура будет повышаться. Так, при $V' < V < V^{\&}$ газу сообщают тепло, а температура его уменьшается.

Количество теплоты, полученное газом при увеличении его объема от начального $V_н$ до конечного $V_к$ можно найти по формулам

$$Q = Q(V_к) - Q(V_н) \text{ при } V_н < V_к \le V^{\&}$$

или

$$Q = Q(V^{\&}) - Q(V_н) \text{ при } V_н < V^{\&} \le V_к .$$

Соответственно, количество теплоты, отданное газом, будет равно

$$Q = Q(V^{\&}) - Q(V_к) \text{ при } V_н \le V^{\&} < V_к$$

или

$$Q = Q(V_н) - Q(V_к) \text{ при } V^{\&} \le V_н < V_к .$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, связанных с этой ситуацией.

Задача 1 (2.53 [1]). *На pV-диаграмме изображен процесс расширения газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением p/2 и объемом 2V. Найдите количество теплоты Q, которое сообщили этому газу. Линия 1—2 – отрезок прямой.*

(Ответ: $Q = 3pV/4$.)

Сопоставляя данные задачи с анализом ситуации, проведенным выше, имеем: $p_1 = p$, $p_2 = p/2$, $V_1 = V$, $V_2 = 2V$. Тогда $a = -p/(2V)$, $b = 3p/2$, $V^{\&} = 15V/8$ и $Q(V^{\&}) = 49pV/64 > 3pV/4$.

Итак, правильный ответ: $Q = 49pV/64$, если газ считать одноатомным.

Задача 2 (2.127 [2], VII.4 [3]). *Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (рис.2). Определите, какое количество теплоты газ получает при нагревании и какое при охлаждении.*

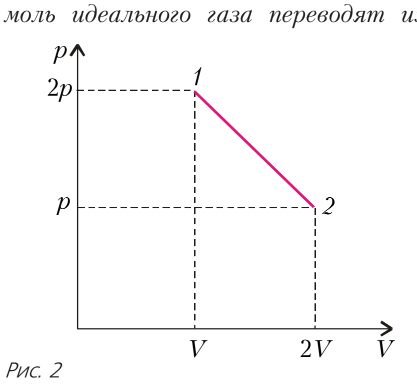

Рис. 2

(Ответ: $Q_1 = 5pV/4$, $Q_2 = pV/4$.)

В этой задаче $p_1 = 2p$, $p_2 = p$, $V_1 = V$, $V_2 = 2V$. Значит, $a = -p/V$, $b = 3p$. Так как нагревание – это повышение температуры газа, то $Q_1 = Q(V')$, где $V' = 3V/2$. После преобразований имеем $Q_1 = 5pV/4$.

Соответственно, $Q_2 = Q(V^{\&}) - Q(V')$, так как на участке $V' < V < V_2$ газ охлаждается, но тепло получает лишь на части этого участка $V' < V < V^{\&}$. Поскольку $V^{\&} = 15V/8$, то $Q(V^{\&}) = 49pV/32$. Тогда, $Q_2 = 49pV/32 - 5pV/4 = 9pV/32 > pV/4$.

Таким образом, правильный ответ к этой задаче: $Q_1 = 5pV/4$, $Q_2 = 9pV/32$. При расчетах газ принят за одноатомный.

Задача 3 (5.5.10 [4], 9.30 [5]). *Нижний конец вертикальной узкой трубки длиной 2L запаян, а верхний конец открыт в атмосферу (рис.3,а). В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя ее половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление, выраженное в миллиметрах ртутного столба, равно L.*

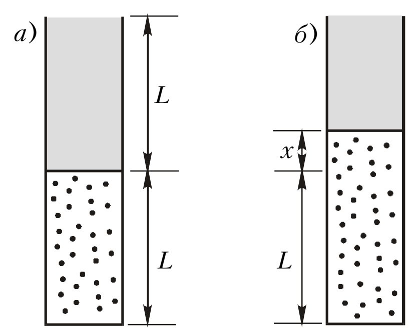

Рис. 3

(Ответ: $9T_0/8$.)

Казалось бы, какое отношение имеет эта задача к теме статьи? Оказывается, самое прямое. Дело в том, что это – реальное устройство, позволяющее провести рассмотренный в статье процесс.

Выделим некоторый объем газа высотой x (рис.3,б). Он находится под давлением столба ртути высотой $L - x$ и внешним давлением $p_0 = \rho g L$, где ρ – плотность ртути. В соответствии с законом Паскаля давление газа равно $p = \rho g(2L - x)$. Пусть площадь внутреннего поперечного сечения трубки S, тогда объем газа $V = S(L + x)$, откуда $x = V/S - L$. Учитывая, что $SL = V_0$ – начальный объем газа, запишем $x = VL/V_0 - L$. Тогда $p = (-p_0/V_0)V + 3p_0$, что совпадает с (1) при $a = -p_0/V_0 < 0$ и $b = 3p_0 > 0$. В итоге получаем, что искомая температура будет достигнута при $V' = 3V_0/2$ и равна $T = 9p_0V_0/(4\nu R)$. Выразив ν из уравнения $2p_0V_0 = \nu RT_0$ для исходного состояния газа, имеем $T = 9T_0/8$.

Казалось бы, это совпадает с приведенным ответом. Но из анализа ситуации мы узнали, что достижение определенной температуры системой в некоторых процессах вовсе не дает гарантии, что желаемый процесс произойдет, в нашем случае – что ртуть выльется. Главное условие вытеснения ртути из трубки – сообщение газу количества теплоты $Q = 49p_0V_0/32$ (анализ задачи 2, если газ считать одноатомным), а не нагревание его до температуры T. Если в момент достижения максимальной температуры прекратить подвод тепла, газ не сможет совершить работу по расширению только за счет убыли внутренней энергии (предоставляем возможность читателям убедиться в этом самостоятельно).

Вывод: данная задача поставлена некорректно. Необходимо требовать либо нахождения максимальной температуры, достигаемой газом в этом процессе (которую и давал ответ к этой задаче), либо нахождения количества теплоты, необходимого для вытеснения ртути из трубки, указав, что в трубке находится, например, одноатомный газ, а площадь внутреннего поперечного сечения трубки S. В этом случае, учтя выражения для p_0 и V_0, получим $Q = 49\rho g L^2 S/32$.

Задача 4 (6 [6]). *Один моль идеального одноатомного газа расширяется по закону, изображенному на графике зависимости давления от объема прямой линией (рис.4). Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. На каком участке газ получает тепло, а на каком отдает?*

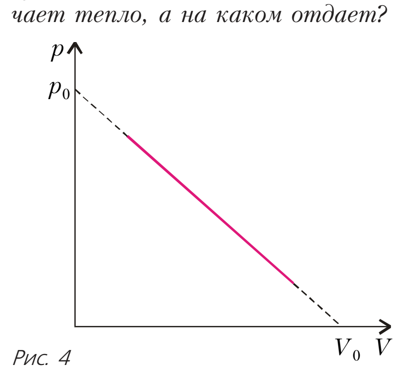

Рис. 4

(Ответ: максимальная температура $T_{\max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V^{\&} = 5V_0/8$; на участке $V < V^{\&}$ газ получает тепло, на участке $V > V^{\&}$ отдает.)

Эта задача сводится к проанализированной ситуации при $p_1 = p_0$, $p_2 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = V_0$, $\nu = 1$ моль. Тогда $a = -p_0/V_0$, $b = p_0$, что для $V' = V_0/2$ дает $T_{\max} = T(V') = p_0V_0/(4R)$. По формуле (3) $V^{\&} = 5V_0/8$.

Уточняем ответ: максимальная температура $T_{\max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V' = V_0/2$. Вторая часть ответа правильная.

Задача 5 (2.99 [7]). *Количество теплоты, получаемое тепловой машиной от нагревателя, равно 1 кДж. При этом объем газа увеличивается от 1 л до 2 л, а давление линейно убывает в зависимости от объема от 1000 кПа до 400 кПа. Найдите изменение внутренней энергии газа.*

(Ответ: 300 Дж.)

Очевидно, что ответ к этой задаче принципиально неверен. Действительно, согласно уравнению состояния идеального газа $pV = \nu RT$, поскольку $p_1V_1 > p_2V_2$, то и $T_1 > T_2$, т.е. изменение внутренней энергии в этом процессе отрицательно. При заданных параметрах состояний газа количество теплоты, необходимое для проведения процесса, нельзя задавать каким угодно, так как оно должно быть строго определенным.

В частности, если считать газ одноатомным, то, в соответствии с анализом рассмотренной ситуации, $a = -6\cdot10^8$ Па/м^3, $b = 1{,}6\cdot10^6$ Па, $V^{\&} = 5/3$ л. Количество теплоты, необходимое для проведения такого процесса, равно $Q = Q(V^{\&}) = 533$ Дж. При этом газ совершит работу по расширению $A' = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = 700$ Дж. Изменение же внутренней энергии равно $\Delta U = 3\nu R(T_2 - T_1)/2 = 3(p_2V_2 - p_1V_1)/2 = -300$ Дж. Во время процесса расширения от объема $V^{\&}$ до объема V_2 газ отдаст 533 Дж – (700 – 300) Дж = 133 Дж тепла холодильнику.

Задача 6 (для самостоятельного решения). *Найдите КПД цикла, проведенного с одним молем одноатомного идеального газа. Диаграмма цикла в координатах p, V представлена на рисунке 5.*

(Ответ: 16/97.)

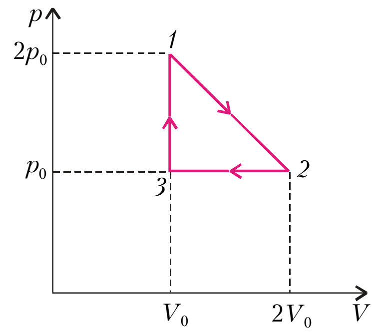

Рис. 5

Итак, никакому состоянию системы нельзя поставить в соответствие ни работу, ни количество теплоты. Они являются функциями процесса, а не состояния. В этом их принципиальное отличие от внутренней энергии. Работа и количество теплоты – это не формы энергии, а только количественные меры способов ее изменения и передачи от одного тела к другому (работа – макроскопический способ, теплопередача – микроскопический). В отличие от внутренней энергии – однозначной функции параметров состояния, количество теплоты не может быть представлено в виде разности значений какой-либо функции параметров состояния, если неизвестно уравнение процесса. Передаваемое системе количество теплоты, как и работа, зависят от того, каким способом система переходит из начального состояния в конечное.

Почему же все-таки передача телу тепла часто ассоциируется с его нагреванием? Первая причина – бытовая: каждый день мы передаем различным телам с помощью различных приборов определенные количества теплоты и замечаем при этом повышение их температуры. Вторая причина – более глубокая, физическая: недостаточные знания о теплоемкости, которая характеризует систему, получающую или отдающую энергию в виде тепла.

Теплоемкость C системы (тела) – это отношение переданного системе на участке процесса количества теплоты ΔQ к происшедшему на этом участке изменению температуры системы ΔT:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

А поскольку количество теплоты, передаваемое системе при изменении ее температуры на ΔT, будет неодинаковым для различных процессов, проводимых с этой системой, то разной будет и теплоемкость. Таким образом, теплоемкость является характеристикой не самой системы или вещества, а конкретного процесса, проводимого с этой системой или веществом. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A'}{\Delta T},$$

где ΔU – изменение внутренней энергии системы и $\Delta A'$ – работа системы при изменении температуры на ΔT.

Для твердых и жидких веществ при изменении температуры объем изменяется очень мало, поэтому $\Delta A' = 0$, и $C = \Delta U/\Delta T$. Так как U – функция параметров состояния и ΔU не зависит от того, каким образом система переведена из одного состояния в другое, то для жидкостей и твердых тел в некоторых интервалах температур C является практически постоянной величиной. Для удобства вводят удельную теплоемкость вещества: $c = C/m$. Вот эта величина в формуле $Q = cm\Delta T$ (которую многие считают определением количества теплоты) и дает основание ошибочно думать, что для всех веществ температура возрастает при сообщении им некоторого количества теплоты, ибо из этой формулы следует прямая пропорциональность между ΔT и Q.

Однако для газов ситуация другая. В общем случае газы могут сильно изменять свой объем. Введем молярную теплоемкость газа $C_м = \Delta Q/(\nu\Delta T)$. Так как $\Delta A' = p\Delta V$ (при малом ΔV), то

$$C_м = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\Delta U}{\Delta T} + p\frac{\Delta V}{\Delta T}\right).$$

Чтобы теплоемкость была определена однозначно, надо указать уравнение процесса.

Известны процессы, называемые политропическими, в которых теплоемкость газа является величиной постоянной на всем протяжении процесса. Далее для простоты будем рассматривать идеальный одноатомный газ. С ним возможны такие политропические процессы:

изохорный процесс – так как $\Delta V = 0$, то $C_м = C_V = \Delta U/(\nu\Delta T) = 3R/2$;

изобарный процесс – так как $\Delta A' = p\Delta V = \nu R\Delta T$, то $C_м = C_p = 3R/2 + R = 5R/2$ (очевидно, что $C_p = C_V + R$ для любого идеального газа, а не только одноатомного);

изотермический процесс – так как $\Delta T = 0$, то $C_м = \pm\infty$ (плюс относится к изотермическому расширению, минус – к изотермическому сжатию);

адиабатный процесс – так как $\Delta Q = 0$, то $C_м = 0$.

А сейчас покажем, что теплоемкость может принимать и промежуточные между указанными выше значения. Для этого найдем зависимость молярной теплоемкости от объема в рассмотренной в начале статьи ситуации, счито

$$Q(V) = -\frac{2p_0}{V_0}V^2 + \frac{15}{2}p_0V - \frac{11}{2}p_0V_0,$$

$$T(V) = \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0V - V^2\right).$$

По определению

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{1}{\nu}\frac{\Delta Q/\Delta V}{\Delta T/\Delta V}.$$

Найдем по отдельности $\Delta Q/\Delta V$ и $\Delta T/\Delta V$ при малых ΔV:

$$\Delta Q = Q(V + \Delta V) - Q(V) =$$

$$= -\frac{2p_0}{V_0}\left(2V\Delta V + (\Delta V)^2\right) + \frac{15}{2}p_0\Delta V,$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} \approx \frac{p_0}{2V_0}\left(-8V + 15V_0\right),$$

$$\Delta T = T(V + \Delta V) - T(V) =$$

$$= \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0\Delta V - 2V\Delta V - (\Delta V)^2\right),$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} \approx \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0 - 2V\right).$$

Тогда

$$C_{\text{м}}(V) = 2R + \frac{3}{2}R\frac{1}{3 - 2V/V_0}.$$

Анализ этой формулы показывает, что при малом изменении объема около значения $V' = 3V_0/2$ молярная теплоемкость $C_{\text{м}}(V') = \infty$, т.е. процесс близок к изотермическому; при значении объема, близком к $V^{\&} = 15V_0/8$, $C_{\text{м}}(V^{\&}) = 0$, т.е. процесс близок к адиабатному.

Итак, слова, вынесенные в заголовок статьи, никоим образом не являются синонимами. Показать, почему возникает их отождествление и к чему оно может привести, и было целью этой статьи.

Литература

1. Меледин Г.В. *Физика в задачах.* (М.: Наука, 1990.)
2. *Материалы вступительных экзаменов по физике.* (Приложение к журналу «Квант» №1/99.)
3. Кашина С.И., Сезонов Ю.И. *Сборник задач по физике.* (М.: Высшая школа, 1983.)
4. *Задачи по физике.* Под редакцией О.Я.Савченко. (М.: Наука, 1988.)
5. Балаш В.А. *Задачи по физике и методы их решения.* (М.: Просвещение, 1983.)
6. *Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон».* (Журнал «Квант», 1992, №7.)
7. *Материалы вступительных экзаменов (задачи по математике и физике).* (Приложение к журналу «Квант» №1/93.)

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

(Начало см. на с.25)

13. В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств. Известно, что любое невыбранное подмножество множества M можно представить в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано? (Не забудьте, что множество M является подмножеством самого себя.)

А.Скопенков

14. Найдите три таких последовательных целых числа $a < b < c$, чтобы количества корней уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ были разными.

А.Шаповалов

15. Заведенный механический будильник звенит, когда часовая стрелка совпадет со стрелкой звонка будильника. Петя завел будильник на некоторое время с целым числом минут. Проснувшись раньше звонка, Петя обнаружил, что часовая стрелка направлена по биссектрисе угла между минутной и стрелкой звонка. Через три минуты, когда стрелка звонка оказалась биссектрисой угла между часовой и минутной стрелками, Петя встал, не дождавшись звонка. На какое время был заведен будильник?

А.Шаповалов

16. Окрасили бесконечный лист клетчатой бумаги, кроме квадрата 7×7. Вася в этом квадрате покрасил клетку, у которой ровно одна соседняя (по стороне) клетка окрашена, затем еще одну клетку, у которой теперь ровно одна соседняя клетка окрашена, и так далее. Какое наибольшее количество клеток таким образом может покрасить Вася?

Д.Калинин

17. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г.,… …, 1101 г. Этикетки потерялись, но завхоз помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедить в этом ревизора за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

А.Шаповалов

18. Существуют ли два таких различных натуральных числа a и b, что $a^{20} + b^{20}$ делится на каждое из чисел $a + b$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, …, $a^{19} + b^{19}$?

Е.Черепанов

19. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.

А.Шаповалов

20. В ряд записаны 2000 различных натуральных чисел. Известно, что для любого натурального $k \le 2000$ сумма любых k чисел, записанных подряд, делится на k. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех 2000 чисел.

И.Акулич

21. Александр Васильевич утверждает, что любые шесть последовательных целых чисел можно так расставить вместо вопросительных знаков, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} ?\,x + ?\,y = ?, \\ ?\,x + ?\,y = ? \end{cases}$$

имела решение в целых числах. Прав ли он?

А.Шаповалов

22. В Цветочном Городе живут 2000 коротышек. Каждый коротышка каждый день дарит подарок каждому своему другу. Во избежание разорения дареное разрешается дарить дальше, но только не тому, кто тебе этот подарок подарил. Знайка подсчитал, что никакой из подарков, который подарили любому коротышке в пятницу, не может вернуться к этому коротышке раньше чем в следующую пятницу. Докажите, что у какого-то коротышки не более 12 друзей.

Е.Черепанов

Публикацию подготовили И.Акулич, Т.Бахтина