«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Если бы у Коли было на 3 пирожка больше, то всем досталось бы поровну – по 11 пирожков. Итак, вначале было 22 пирожка, и после окончательного дележа каждому досталось по 10 пирожков.

2. Найдем все двузначные числа вида $\overline{ab} = 10a + b$, где a, b – цифры ($a \ne 0$), которые делятся на сумму квадратов своих цифр: $10a + b = m\left(a^2 + b^2\right)$, $m \ne 0$, m – целое. Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно переменной a, находим

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - bm(bm-1)}}{m}.$$

Обозначим $bm = k$ и найдем возможные значения целой переменной $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, при которых значение подкоренного выражения $25 - k(k-1)$ равно точному квадрату. Легко убедиться, что это может быть только при $k = 0$ или $k = 1$.

Если $k = 0$, то $b = 0$ и $a = \frac{10}{m}$. При $m = 2, 5, 10$ получаем три возможных значения для переменной a: $a = 5, 2, 1$ и, соответственно, три ответа: 50; 20; 10.

Если $k = 1$, то $b = m = 1$ и допустимых значений для цифры a не существует.

3. По условию, в каждом округе может находиться не более 13 субъектов, и, таким образом, в семи округах – не более чем $7 \times 13 = 91$ субъект. Болотный и Холмистый округа имеют менее 13 субъектов, поэтому во всей Федерации не более 89 субъектов, причем последнее количество достигается лишь в том случае, если все остальные округа (кроме Болотного и Холмистого) имеют по 13 субъектов.

Итак, в Снежном и Пустынном округах субъектов поровну.

4. Обозначим длину аквариума через a, ширину – b, а высоту – c. Поскольку занимаемый воздухом в аквариуме объем один и тот же, независимо от его положения, то

$$3bc = 3ac = 3ab.$$

Отсюда $a = b = c$ и, таким образом, аквариум имеет форму куба.

5. Упорядочим гири по массе и положим на левую чашку весов пять самых легких гирь с общей массой m, а на правую чашку – пять самых тяжелых гирь с общей массой M. Выровняем весы, добавив на обе чашки по 5 гирь. Масса пяти добавочных гирь на левой чашке весов при этом не будет превышать M, а масса пяти добавочных гирь на правой чашке весов будет не меньше m. Если весы оказались в равновесии, то масса гирь на каждой чаше весов в точности равна $M + m$, причем масса добавочных гирь на правой чашке равна m, а масса добавочных гирь на левой чашке равна M. Рассмотрим два набора из пяти самых легких гирь на левой чашке весов массы m и равный ему по массе набор из пяти гирь на правой чашке весов. Если среди этих наборов будут различающиеся по массе гири, то равенства общих масс гирь в этих наборах не будет. Точно так же, рассматривая набор из пяти самых тяжелых гирь на правой чашке весов массы M и равный ему по массе набор из пяти гирь на левой чашке весов, приходим к выводу, что массы гирек в этих наборах равны.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2000 г.)

6. Оценим числитель и знаменатель левой части неравенства

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} < 4.$$

Имеем

$$(a+b)^2 > a^2 + b^2,$$

$$(c+d)^2 = c^2 + d^2 + 2cd \le \left(c^2 + d^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) = 2\left(c^2 + d^2\right).$$

Следовательно,

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} > \frac{a^2 + b^2}{2\left(c^2 + d^2\right)},$$

а значит,

$$4 > \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}.$$

7. Обозначим искомые числа a, b, c, d. По условию, числа abc, bcd, cda – квадраты целых чисел, следовательно, их произведение – число $a^2b^2c^3d^2$ – также квадрат целого числа. Отсюда заключаем, что число c^3 – квадрат целого числа и, следовательно, квадратом целого числа является число c. Докажем это.

Разложив число c на простые множители, $c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, запишем равенство куба этого числа некоторому квадрату целого числа:

$$c^3 = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} \ldots p_k^{3\alpha_k} = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \ldots p_k^{2\beta_k}.$$

Из равенства степеней простых множителей в этих двух разложениях заключаем, что $3\alpha_i = 2\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, все числа α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, – четные: $\alpha_i = 2\gamma_i$. Отсюда $c = \left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}\right)^2$ – квадрат целого числа.

Рассмотрев группу чисел abc, bcd, abd, точно так же заключаем, что число b – квадрат целого числа. Воспользовавшись другими перестановками (abc, bcd, acd для числа c; abd, bcd, acd для числа d), делаем вывод, что числа c и d также являются квадратами целых чисел.

8. Рассмотрим треугольник ABC, вокруг которого описана окружность O. Пусть D – точка пересечения биссектрис двух внешних углов этого треугольника с вершинами B и C, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle IBD = \angle ICD = 90°$, то точки I, B, D и C лежат на некоторой окружности O'. Если бы точка D лежала на окружности O, то окружности O и O' совпадали бы по трем точкам. Но это невозможно, так как очевидно, что окружности O и O' различны.

Итак, две биссектрисы внешних углов треугольника не могут пересекаться на его описанной окружности.

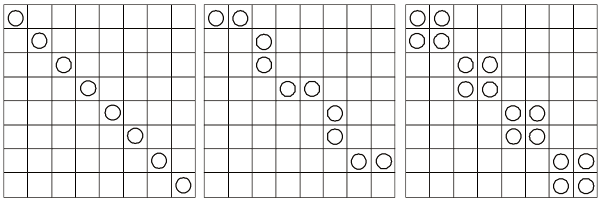
9. Выберем *самую нижнюю* горизонталь доски, на которой стоят ладьи, и рассмотрим *самую правую* ладью на этой горизонтали. Обратим внимание, что *ниже* этой ладьи (на той же вертикали) и *правее* этой ладьи (на той же горизонтали) ладей нет, поэтому она может угрожать не более чем двум ладьям (расположенным левее ее на той же горизонтали и выше ее на той же вертикали). Таким образом, $n \le 2$.

Задачу можно решить для всех $n \le 2$.

Для этого рассмотрим поля доски, примыкающие к ее наружной границе. Каждое такое поле – квадрат, одна сторона которого (а для угловых полей – даже две) совпадает с наружной границей доски. Назовем такие стороны *наружными отрезками.* Всего на доске, как видно, $8 \times 4 = 32$ наружных отрезка.

Пусть на доске расставлено несколько ладей так, что каждая из них угрожает ровно n другим ладьям. Заметим, что любая ладья ведет «обстрел» по четырем направлениям: влево, вправо, вверх и вниз от поля, которое занимает. Если при этом ровно n других ладей попадает под ее удар, то это значит, что в n из этих четырех направлений «выстрел» ладьи попадает в другую ладью, а в остальных $(4-n)$ направлениях «выстрел» попадает на наружный отрезок. Кроме того, каждый наружный отрезок может обстреливаться не более чем одной ладьей (той, что находится ближе к нему в той же вертикали или горизонтали). Следовательно, число ладей не может превосходить $\frac{32}{4-n}$. Для $n = 0$, 1 и 2 получаем соответствующие значения максимального допустимого числа ладей: 8, 10 и 16.

Оказывается, все эти значения достигаются; примеры приведены на рисунке 1.



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$

Рис. 1

10. Обозначим школьников точками. Если два школьника обменялись адресами, то соединим соответствующие им точки линией. В полученной схеме (графе) будет 45 точек и 950 линий. Нужно доказать, что построенный граф является связным, т.е. можно перейти по линиям из любой точки в любую другую. Предположим, что это не так. Рассмотрим несвязный граф, который содержит наибольшее число линий между точками. Очевидно, что этот граф состоит из двух частей, в каждой из которых любые две точки соединены линией. Пусть в большей из частей будет k точек (значит, $k \geq 23$), тогда в меньшей их $(45-k)$. Число линий такого графа

$$k(k-1)/2+(45-k)(44-k)/2 = k^2-45k+45\cdot 22.$$

Значения построенного квадратного трехчлена растут с увеличением числа k. Наибольшее k, при котором граф является несвязным, равно 44. В таком графе будет 946 линий. А в графе, соответствующем условию задачи, 950 линий. Получено противоречие, т.е. исходный граф является связным. Следовательно, Маша может узнать адрес Ирины.

О пользе вневписанных окружностей

1. Исходя из теоремы 2, сумма периметров малых треугольников равна периметру большого. Значит, периметр исходного треугольника равен 48. А так как основание равно 12, то боковая сторона равна 18.

2. Пусть в данном треугольнике $AB = 12$, $AC = 10$ и $BC = 6$. Окружность, вписанная в данный треугольник, является вневписанной для отсеченного. Значит (по теореме 2), полупериметр отсеченного треугольника равен длине отрезка от вершины A до точки касания вписанной окружности, который равен разности полупериметра и стороны BC. Отсюда искомый периметр равен

$$\left((AB+AC+BC)/2-BC\right)\cdot 2 = 8\cdot 2 = 16.$$

3. Точка X совпадает с точкой касания вневписанной окружности. Доказательство вытекает из теоремы 4.

4. Очевидно, что мы можем построить на сторонах данного угла A точки T_1 и T_2 – точки касания вневписанной окружности. Восставив к сторонам угла перпендикуляры в точках T_1 и T_2, найдем центр вневписанной окружности. Под данным углом B проводим касательную к построенной вневписанной окружности (при помощи гомотетии). Эта касательная отсекает от сторон угла искомый треугольник.

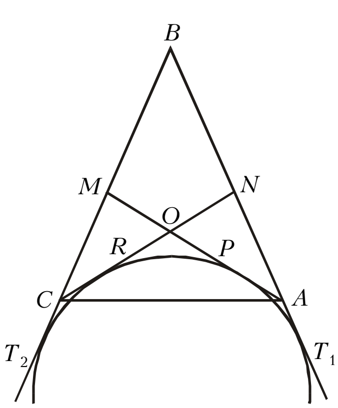


Рис. 2

5. По условию $AM + AN = CM + CN$, следовательно, периметры треугольников BNC и BAM равны. Значит, они имеют общую вневписанную окружность (рис.2). Пусть эта окружность касается прямых BC и BA в точках T_2 и T_1, а прямых AM и CN в точках P и R. Тогда $AB + AP = BC + CR = BT_2$. И так как $OP = OR$, то $AO + AB = CO + CB$, что и требовалось доказать.

6. Так как $AM = 2MM_1$ (M – центроид, M_1 – середина BC), то положение точки M_1 известно. Далее воспользуемся теоремой 4. В треугольнике TKR отрезок M_1O – средняя линия (O – инцентр), значит, $OM_1 \parallel RT$ (рис.3). Очевидно, что для точки N – середины RT – выполняется условие $\angle ONM_1 = 90°$. Следовательно, точку N мы можем построить как точку пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно M_1O, и полуокружности, построенной на отрезке M_1O как на диаметре. Далее, проведя через точку M_1 прямую, параллельную отрезку NO, мы получим прямую, содержащую сторону BC. Остается построить вписанную окружность и провести из точки A к ней касательные до пересечения с прямой BC. Заметим, что полуокружность с диаметром M_1O пересекает RT дважды, что соответствует двум различным решениям задачи.

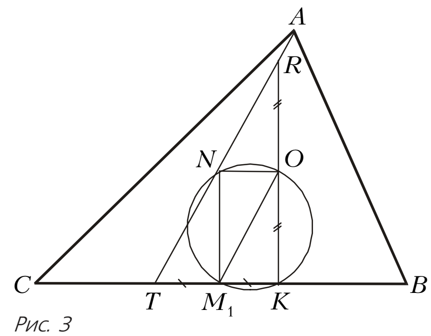


Рис. 3

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4r-280}{90-r}$, $r \in \left[70; 76\frac{2}{3}\right]$.

2. При $a < 0$ уравнение не имеет решений, при $a = 0$ и при $a > 4$ уравнение имеет два решения, при $0 < a < 4$ уравнение имеет четыре решения, при $a = 4$ уравнение имеет три решения.

3. $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}; -3\right] \cup \left[3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$. **5.** $2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\alpha/2}{3}}$.

Вариант 2

1. 12. **2.** $(2;3),(3;2),\left(\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2};\frac{-7\mp\sqrt{73}}{2}\right)$.

Указание. Поскольку $c = 1$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} xy-(x+y) = 1,\\ xy(xy+x+y+1) = 72. \end{cases}$$

3. $\frac{2\pi}{15}n$, $n \neq 15t$, $n, t \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi}{17}k$, $k \neq 8+17t$, $k, t \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(-(3+\log_5 3) \pm \sqrt{5+\log_5^2 3+6\log_5 3}\right)/2$. **5.** 3 :10.

Вариант 3

1. 6. **2.** −99; −19; −17; 63.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $(-4; 4)$. **5.** $1/2$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_0 = gt/2 - H/t$. **2.** $A = \dfrac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$.

3. $\rho = \big(U(\mathcal{E} - U) - Pr\big)/(2lP)$. **4.** $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{p_1 V_1 T_2}{p_2 V_2 T_1} = 14{,}1\%$.

5. $f = -\dfrac{d|F|}{d + |F|} = -4{,}8$ см, изображение мнимое.

Вариант 2

1. $a = v_0^2/(2s)$. **2.** $A = 2mgH - mv^2/2$.

3. $U = \left(\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Pr}\right)/2$.

4. $m = (p_1/T_1 - p_2/T_2)V\mathrm{M}/R = 9\cdot 10^{-6}$ кг. **5.** $F = -L(L - l)/l$.

Вариант 3

1. $t = 2s/v_0$. **2.** $A' = 2mgL\sin\alpha + A$. **3.** $r = (\mathcal{E} - U)/I$.

4. $m = p_{\text{н}}(V_0 - V)\mathrm{M}/(RT) = 0{,}002$ кг. **5.** $s = FL/(F - L)$.

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 50 дней. **2.** $\pm\left((-1)^n \dfrac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

3. $7/2$. **4.** $(-1; 1)$.

5. -1; 1. *Указание.* Пусть $y = kx + 1$ – уравнение прямой AB. Так как

$$|x| - x = \begin{cases} 0 \text{ при } x \ge 0, \\ -2x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

имеем $-2 < k < 0$,

$$x_A = \frac{-1}{2+k} \text{ и } y_A = \frac{2}{2+k}$$

(рис.4), $y_B = 0$, $x_B = \dfrac{-1}{k}$. Площадь треугольника OAB равна

$$S = \frac{1}{2}x_B y_A = \frac{1}{-k(2+k)}.$$

Наибольшее значение знаменателя этой дроби равно 1 при $k = -1$.

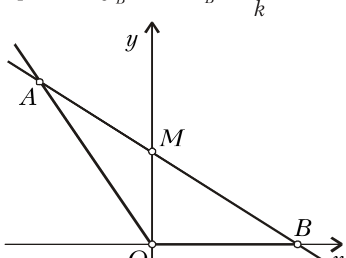


Рис. 4

6. $x = y = a + \sqrt{1 - a^2}$ при $a \in \left(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\right] \cup \{1\}$.

Указание. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = x,\ x > 0, \\ x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень.

7. 1; $\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, а параллелограмм PC_1QA – его сечение (рис.5). Площадь этого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника APC_1, причем высота PK треугольника не меньше длины общего перпендикуляра скрещивающихся прямых DD_1 и AC_1, так что минимальную площадь имеет сечение, для которого $PK \perp DD_1$, $PK \perp AC_1$. Проекцией отрезка PK на плоскость $ABCD$ служит высота DL треугольника ACD. Ясно, что $PQ < AC_1$, так что $AC_1 = 6$, $PQ = 2\sqrt{3}$. Вычисляя отрезки $PK = DL = \sqrt{3}/2$, $OK = 3/2$, получаем, что $CL/LA = 1/3$. Положив $CL = x$, из соотношения $DL^2 = CL\cdot LA$ находим x, а затем AD и CD.

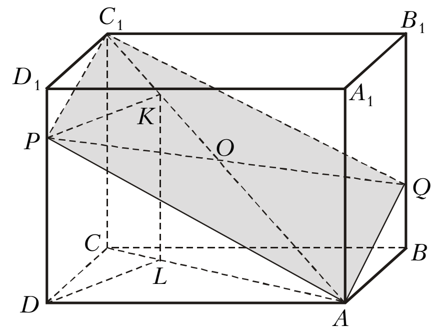


Рис. 5

Вариант 2

1. 8 мин, 9 мин. **2.** $(-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. 9. **4.** $(0; 1) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

5. 1; 8. *Указание.* Прямая $y = kx$ пересекает график квадратного трехчлена при

$$x_{1,2} = 2(k-2) \pm \sqrt{4k^2 - 16k + 20},$$
$$y_{1,2} = 2(k-2)k \pm k\sqrt{4k^2 - 16k + 20}.$$

Квадрат расстояния между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равен $16\left((k-1)^4 + 4\right)$, откуда минимум расстояния равен 8 при $k = 1$.

6. $x_{1,2} = \left(5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$ при $a \in (-\infty; -15) \cup (0; 1]$;

$x_1 = \left(5 - a + \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$, $x_2 = 1 - \sqrt{a}$ при $a \in (1; +\infty)$.

Указание. При $x \ge 0$ получаем уравнение

$$5x^2 - 2(5 - a)x + 5(1 - a) = 0, \qquad (\&)$$

имеющее два различных неотрицательных корня при

$$a < -15 \text{ и } 0 < a \le 1.$$

При этом

$$x_{1,2} = \frac{5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}}{5}.$$

Уравнение $(\&)$ имеет один неотрицательный корень при $a = 0$ (тогда $x = 1$) и $a = -15$ ($x = 4$), а также при $a > 1$. При $x < 0$ получим уравнение

$$(x - 1)^2 = a,$$

имеющее один отрицательный $\left(x = 1 - \sqrt{a}\right)$ и один положительный $\left(x = 1 + \sqrt{a}\right)$ корень при $a > 1$.

7. $\dfrac{S}{3\pi}$. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед (рис.6). Проведем $(B_2D_2) \| BD$, $A \in (B_2D_2)$ и $CF \perp (B_2D_2)$, тогда $FC_1 \perp (B_2D_2)$ и

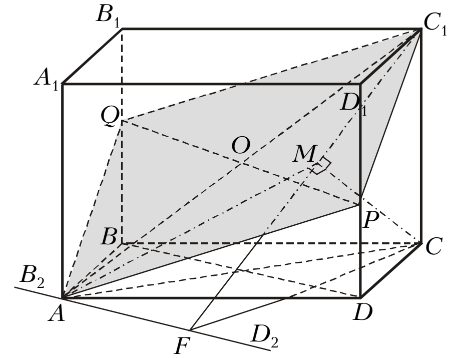


Рис. 6

плоскость C_1FC перпендикулярна прямой B_2D_2, а следовательно, и плоскости сечения. Тогда $\angle C_1FC = 45°$. Проведем $CM \perp C_1F$, очевидно, $CM \perp (C_1FA)$, AM – проекция AC на секущую плоскость, а $\angle CAM = 30°$.
Пусть $MC = l$, тогда $AC = 2l$ и $CC_1 = l\sqrt{2}$.
Диагональ параллелепипеда, вписанного в сферу радиуса R, равна ее диаметру $2R$.
Далее находим, что

$$l = 2R/\sqrt{6},\ AC = 4R\sqrt{6},\ C_1F = 2R,$$

$$S_{APC_1Q} = \frac{4}{3}R^2 = \frac{S}{3\pi}.$$

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 5. **4.** $(-\infty; 0]$. **5.** $\frac{2062}{25}$.

6. 12 часов. **7.** $\frac{a}{6}$. **8.** См. рис.7. **9.** $-\frac{1}{6}$. **10.** $\frac{103\sqrt{209}}{1152}$.
11. $(-4; 4)$.

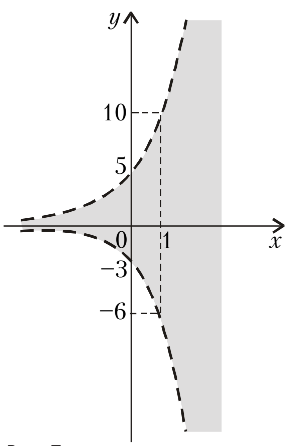


Рис. 7

Вариант 2

1. 0,5. **2.** $3y^{\frac{1}{4}} - 4^{-\frac{3}{4}}$. **3.** 0,5.
4. $(-2; +\infty)$. **5.** $\log_{\frac{2}{7}} 3$.
6. $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n \neq 3+7l$, $n \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$.

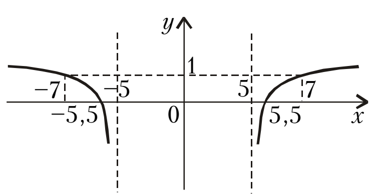


Рис. 8

7. См. рис.8. **8.** 5, 12. **9.** 0. **10.** 100133. **11.** 0,25.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = \pi nD \approx 26$ м/с. **2.** $S = \frac{m}{(\rho_в - \rho_л)H} = 25$ м^2.

3. $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{m^2(v_1-v_2)^2}{2glM^2}\right) \approx 31°$.

4. $A = R\left(T_1 + T_2^2/T_1 - 2T_2\right) \approx 11$ Дж.

5. $V_1 = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}V = 80$ л, $V_2 = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}V = 120$ л.

6. $t = t_0 + (n-1)/\alpha = 2200$ °C. **7.** $I_к = \frac{\mathcal{E}I}{\mathcal{E}-U} = 48$ А.

8. $W = 2C\mathcal{E}^2 \approx 1{,}4\cdot10^{-3}$ Дж.

9. $R = \frac{nd}{n-1} = 3$ мм. **10.** $U = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) \approx 1{,}9$ В.

Вариант 2

1. $s_2 = s_1\left(t_2/t_1\right)^2 = 0{,}9$ м. **2.** $F = m(g+a) \approx 1300$ Н.

3. $V = \frac{mv\cos\alpha}{M+m} = 0{,}1$ м/с. **4.** $\varphi = \frac{p_{н2}}{p_{н1}}\frac{T_1}{T_2}100\% = 49\%$.

5. $\eta = \frac{A - RT_1(n-1)}{A + 3RT_1(n-1)/2}100\% \approx 29\%$.

6. $F = qE/2 = 10^{-4}$ Н. **7.** $A = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}t \approx 40$ Дж.

8. $I_1 = \frac{\mathcal{E}L_2}{R(L_1+L_2)} = 0{,}6$ А, $I_2 = \frac{\mathcal{E}L_1}{R(L_1+L_2)} = 0{,}3$ А.

9. $l_1 = 2l - \frac{Fd}{d-F} = 10$ см; $H_1 = H\frac{F}{d-F} = 6$ см.

10. $\lambda = \frac{hc}{A+eU} \approx 0{,}25$ мкм.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $m = \rho Sl/4$.
2. Для плотности насыщенного пара из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем $\rho_н = Mp_н/(RT)$. Если в сосуд из баллона перешла масса газа m, то для нее справедливо равенство $p_0V_0 = mRT/M$, причем $m = (\rho - \rho_н)V$. Отсюда получаем

$$p_н = \frac{\rho RT}{M} - \frac{p_0V_0}{V}.$$

3. Заряженные частицы в магнитном поле в общем случае движутся по винтовым линиям. Здесь же, раз встреча частиц состоялась, то, в соответствии с законом сохранения импульса, при распаде составляющие скоростей, направленные вдоль и против поля, должны отсутствовать. Поэтому частицы будут двигаться по окружностям в разные стороны, оставаясь в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, причем $m_1v_1 = m_2v_2$. На основании второго закона Ньютона получаем

$$R_2 = \frac{m_2v_2}{qB} = R_1 = \frac{m_1v_1}{qB} = R,$$

т.е. частицы движутся по одной и той же окружности. Время движения их до встречи равно

$$t = \frac{2\pi R}{v_1+v_2} = \frac{2\pi}{qB}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

4. Пусть $N = N_A/22{,}4$ (где N_A – постоянная Авогадро) – число молекул водорода в сосуде. Тогда удаленный заряд равен $q = e\cdot 2N\eta = eN_A\eta/11{,}2$, где η – искомое неизвестное. После удаления электронов положительный заряд q распределится по поверхности сосуда, создав избыточное разрушающее давление. Пусть сосуд – куб с ребром $a = (V)^{1/3} = 0{,}1$ м. Простейшая, конечно очень грубая, модель, но вполне пригодная для оценки порядка искомый величины, такова. Два точечных заряда по $q/2$, находясь в центрах противоположных граней куба, создают избыточное давление p. Тогда

$$p = \frac{k(q/2)^2}{a^2}\frac{1}{a^2} = \frac{k\left(eN_A\eta/11{,}2\right)^2}{4a^4},$$

$$\eta = \frac{22{,}4a^2\sqrt{p/k}}{eN_A};\ 2{,}5\cdot10^{-8}$$

(здесь $p = 10^6$ Па, $k = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2, $N_A = 6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$). Если взять более реалистическую модель, выбрав удобную для расчета сферическую форму сосуда радиусом $a = \left(3V/(4\pi)\right)^{1/3} = 6{,}2\cdot10^{-2}$ м, то плотность заряда равна

$\sigma = q/\left(4\pi a^2\right)$, поле внутри отсутствует, а снаружи равно $E = k \cdot 4\pi\sigma = kq/a^2$. Тогда

$$p = \frac{qE}{2} = \frac{kq^2}{8\pi a^4},\ \eta = \frac{11{,}2a^2\sqrt{8\pi p/k}}{eN_{\text{А}}};\ 6\cdot 10^{-8}.$$

5. Сумма сил нормального давления $2N\sin\alpha$ выталкивает упаковку, а сумма сил трения $2F\cos\alpha = 2\mu N\cos\alpha$ ее удерживает (здесь 2α – угол раствора ножниц). Угол α для упаковки таков, что $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$ вплоть до ее полного выскальзывания. Поскольку толщина пластинки много меньше диаметра упаковки, равенство $\sin\alpha = \mu\cos\alpha$ для пластинки достигается на некотором расстоянии от конца ножниц. В этом случае сила трения покоя препятствует выскальзыванию: $2N\sin\alpha = 2F\cos\alpha < 2\mu N\cos\alpha$.

Вариант 2

1. $l_0 = \left(m_1 l_2 + m_2 l_1\right)/\left(m_1 + m_2\right)$.

2. Из того, что треугольник равнобедренный, а заряды и массы частиц в вершинах острых углов одинаковы (рис.9), следует, что гипотенуза в процессе движения переносится параллельно, т.е. движется поступательно, увеличиваясь в размерах. Если найдется условие, при котором один из катетов тоже переносится параллельно, то подобие будет обеспечено. Скорость и ускорение частиц с массой m удобно разложить по направлениям катета и гипотенузы. Из построения видно, что катет переносится параллельно, если в любой момент времени $v_M \cos 45^\circ = v_2 \cos 45^\circ$, т.е. $v_M = v_2$, и, следовательно, $a_M = a_2$. Из закона Кулона и последней связи получаем

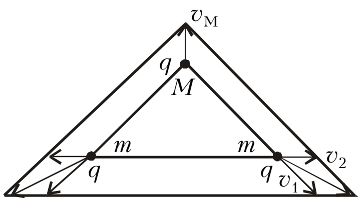


Рис. 9

$$M = 2\sqrt{2}m.$$

3. Так как напряжение на катушке равно $U_L = L\Delta I/\Delta t$, в момент, когда ток максимален, напряжение на ней равно нулю, а напряжение на конденсаторах будет одним и тем же – обозначим его через U. Суммарный заряд на верхних (и на нижних) пластинах конденсаторов сохраняется. Если заряды одноименные, то

$$q = C_1U_1 + C_2U_2 = \left(C_1 + C_2\right)U,$$

откуда

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

Искомый ток определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{\left(C_1 + C_2\right)U^2}{2},$$

откуда

$$I = \left|U_1 - U_2\right|\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

Если же на верхних пластинах разноименные заряды, то

$$I = \left(U_1 + U_2\right)\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

4. Простейшая модель – две точечные массы $M_З/2$ находятся на расстояния радиуса Земли $R_З$ друг от друга. Тогда по закону всемирного тяготения

$$F \approx GM_З^2/\left(4R_З^2\right) = M_Зg/4 = \rho_З\,\pi g R_З^3/3 \approx 1{,}5\cdot 10^{25}\ \text{Н}$$

при $g = 10$ м/с^2, $R_З \approx 6{,}4\cdot 10^6$ м, $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м$^3/\left(\text{с}^2\cdot\text{кг}\right)$, $\rho_З \approx 5{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.

Можно оценить силу через давление на Земле, считая ее недра несжимаемой жидкостью:

$$F;\ pS;\ \rho_З g R_З \pi R_З^2;\ 5\cdot 10^{25}\ \text{Н}.$$

Вариант 3

1. $x = d\sin\alpha/\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$.

2. $m = 2\alpha p_0 lSh/\left(g\left(\alpha\left(l^2 - h^2\right) - h^2\right)\right)$.

3. После включения поля в системе возникнут гармонические колебания. Сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, поэтому сохраняется импульс:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0,$$

а центр масс остается неподвижным. Максимальные значения скоростей тел достигаются одновременно в тот момент, когда их ускорения, а следовательно, и действующие на них силы равны нулю. Если смещения тел в момент прохождения равновесия равны x_1 и x_2, то по закону Гука

$$qE = k\left(x_1 - x_2\right).$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = qE\left(x_1 - x_2\right) - \frac{k\left(x_1 - x_2\right)^2}{2}.$$

Отсюда получаем максимальные значения скоростей:

$$v_{1m} = qE\sqrt{\frac{m_2}{km_1\left(m_1 + m_2\right)}},\ v_{2m} = qE\sqrt{\frac{m_1}{km_2\left(m_1 + m_2\right)}}.$$

4. Для экватора, например, $\Delta T/T;\ 0{,}82$.

5. Вначале, при небольшом погружении, стержень вертикален и его равновесие устойчиво. Затем при малых отклонениях стержня от вертикали возникают моменты сил, которые не возвращают его в вертикальное положение, а содействуют дальнейшему отклонению. Неустойчивость вертикального положения возникает при условии

$$L - l < L\sqrt{1 - \rho/\rho_{\text{в}}},$$

где L – длина стержня, l – глубина его погружения, ρ – плотность материала стержня, $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды. При этом сила натяжения нити еще не равна нулю, и, потеряв вертикальную устойчивость, стержень занимает наклонное положение. По мере дальнейшего подъема уровня воды стержень будет наклоняться все сильнее, пока не займет устойчивое горизонтальное положение, при котором сила натяжения нити равна нулю.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in (0;\, n)$;

б) $g(x) = 4x - x^2$, $x \in (0;\, 4)$ (рис.10);

в) $a \in \{0\} \cup [1;\, 3)$.

2. $x > 1$.

3. $(-1)^k\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\sqrt{3}a^2$.

5. $\dfrac{H^3\sin 2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\beta}{3}$.

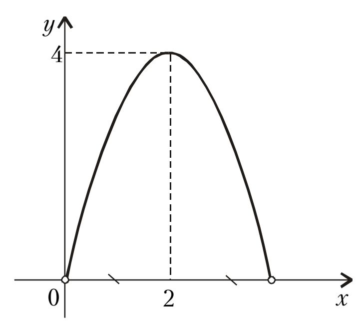


Рис. 10

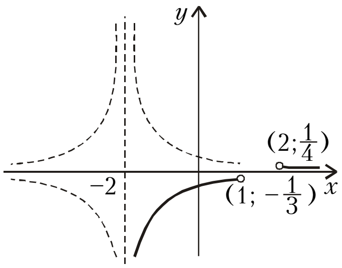


Рис. 11

Вариант 2

1. а) $x\in(-n;1]\cup(2;+\infty)$;

б) $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-2;1),\\[2mm] \dfrac{1}{x+2}, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$

(рис.11);

в) $a\in[-1/3;0]\cup[1/4;+\infty)$.

2. $(0;1/9]\cup[27;+\infty)$.

3. $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\quad x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

5. $\dfrac{\pi h^3\left(1-\sin^2\beta\cos^2\alpha/2\right)}{3\sin^2\beta\cos^2\alpha/2}$.

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(16;1)$, $(1;16)$. **2.** $\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{10}$, $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. 4 ч, 3 ч. **4.** $\left(2;\dfrac{7}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2};\dfrac{8}{3}\right)$. **5.** $-3<k<3$. **6.** 1 : 4.

Вариант 2

1. $(25;16)$. **2.** $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{6}$, $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. 48 км/ч, 32 км/ч. **4.** $(-\infty;0]\cup[9;15)$.

5. $k<\dfrac{5}{7}\ln 2$. **6.** 1 : 6.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 96 В. **2.** 30°; 1 с. **3.** 415 Дж. **4.** 0,01 А, 1,4 В. **5.** 219 м/с.

Вариант 2

1. 2000 В/м. **2.** 16,9. **3.** 0,6 м. **4.** 231 К; 4700 Дж. **5.** 0,08 м.

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,4. **2.** −4. **3.** 2. **4.** −2. **5.** 3. **6.** 4. **7.** −0,15. **8.** −22,5. **9.** 0,5. **10.** 13. **11.** 0,2. **12.** 13.

Вариант 2

1. 0,2. **2.** 5. **3.** −3. **4.** −8. **5.** 5. **6.** 2,5. **7.** 0,25. **8.** −9. **9.** 0,5. **10.** 18. **11.** 2. **12.** 4.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 60 м/с. **2.** 7 Н. **3.** 60 Дж. **4.** 40 Н. **5.** 96 °С. **6.** 3 Ом. **7.** 30. **8.** 2 мкс. **9.** 7 кг/с. **10.** 327 °С. **11.** 300 нК. **12.** 16.

Вариант 2

1. 50 м. **2.** 84%. **3.** 240 см^3. **4.** 25%. **5.** 5. **6.** 17 Дж. **7.** 9 см. **8.** 3. **9.** 100 кг. **10.** 60 Н. **11.** 60%. **12.** 2000 км/с.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a\in\left[\dfrac{3-3\sqrt5}{2};\dfrac{3}{\sqrt2}\right]$. При $a=0$ получаем уравнение $\sqrt{9-x^2}=|x|$, имеющее два решения.

Пусть $a>0$. Функция $f(x)=a+\sqrt{x^2-ax}$ определена на лучах $(-\infty;0]$ и $[a;+\infty)$, убывает на первом из них и возрастает на втором, причем $f(x)\to+\infty$ при $x\to\infty$. График $y=\sqrt{9-x^2}$ – полуокружность радиуса 3, так что данное уравнение имеет два решения, если точка $A(a;a)$ графика функции f лежит в круге радиуса 3, т.е. если $2a^2\le 3$ (рис.12,*а*). Таким образом,

$$0<a\le\frac{3}{\sqrt2}.$$

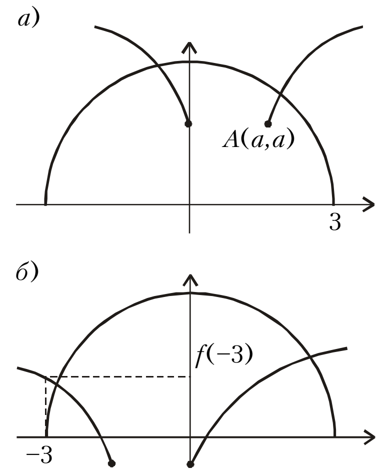


Рис. 12

В случае $a<0$ уравнение имеет два решения, если $f(-3)\ge0$ (рис.12,*б*). Получаем неравенство

$$a+\sqrt{9+3a}\ge0,$$

откуда $\dfrac{3-3\sqrt5}{2}\le a<0$.

2. $\dfrac{\pi}{12}(6n-1)$, $n\in\mathbf{Z}$, $\dfrac{\pi}{24}(6m+1)$, $m\in\mathbf{Z}$, $m\le0$.

3. $[-2;0)\cup(5;+\infty)$. **4.** $R/r=\left(\pm\cos\dfrac{\varphi}{2}+\sqrt{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+8}\right)\Big/2$.

Указание. Следует рассмотреть отдельно два случая в зависимости от того, лежит ли точка O в треугольнике или же не лежит. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично).

Будем для простоты считать, что $r=1$, тогда найденное значение R и будет искомым отношением. Треугольник ABC – равнобедренный. Пусть $AB=AC$, K – середина основания BC, P – точка касания стороны AB с меньшей окружностью. Имеем

$$OK=\cos\frac{\varphi}{2},\ BK=\sqrt{R^2-\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Далее,

$$AB=\sqrt{R^2-\cos^2\frac{\varphi}{2}+\left(R+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}=\sqrt{2R\left(R+\cos\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Из подобия треугольников AOP и ABK получаем, что

$$\sqrt{2R\left(R+\cos\frac{\varphi}{2}\right)}=R\sqrt{R^2-\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$R^2-R\cos\frac{\varphi}{2}-2=0.$$

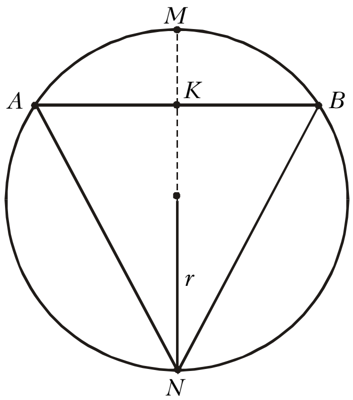


Рис. 13

5. $MA = MB = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Точки A, B, M и N лежат на сфере, описанной около пирамиды $ABCN$, а также на единичной сфере с центром в точке C. Таким образом, эти четыре точки лежат на пересечении этих сфер, т.е. на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABN; в частности, точка M лежит в плоскости грани ABN. Пусть K – середина стороны AB (рис.13). Тогда

$$MK = \frac{1}{2}r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$MA^2 = MB^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. −39. Пусть a_1 – первый член последовательности, d – ее разность. Из соотношений

$$x = a_1 + 6d \text{ и } \frac{a_1 + a_{17}}{2}17 = 51$$

получаем, что $x + 2d = 3$. Пусть $-6x = a_n$. Тогда

$$n = \frac{7\frac{3-x}{2} - 7x}{\frac{3-x}{2}} = \frac{21(x-1)}{x-3}.$$

Поскольку при $x < -20$ верны неравенства

$$21 > \frac{21(x-1)}{x-3} > \frac{21\cdot 21}{23} > 19,$$

а число n – натуральное, то $n = 20$ и $x = -39$.

2. $2\pi k - \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{2}{3}\pi k + \frac{5}{18}\pi$ при $k = 1, 2, \ldots;$

$-\frac{\pi}{18} - \frac{2}{3}\pi k$ и $\frac{\pi}{6} - 2\pi k$ при $k = 0, 1, \ldots$

3. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right] \cup (1; 2]$. **4.** 3.

5. $CM = 5\sqrt{3}$ и $DM = 2\sqrt{3}$. *Указание.* Отрезки BM и DN параллельны. Проведем отрезок $MK \parallel AB$ (рис.14,*а*). Пусть $\alpha = \angle MDN = \angle ADN$. Тогда $\angle DMK = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\angle DKM = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Четырехугольник $BMKN$ – параллелограмм, так что $MK = BN = 2$. По теореме синусов находим из

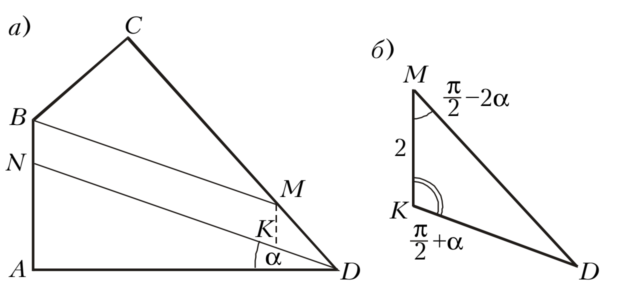


Рис. 14

треугольника DKM (рис.14,*б*), что $DK = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку $ND\sin\alpha = 6$, а $ND = NK + KD = 10 + KD$, то $6 = 10\sin\alpha + 2\cos 2\alpha$, откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Вариант 3

1. $\left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$. *Указание.* Сделав замены $x = \sqrt{2}\cos t$ и $y = \sqrt{2}\sin t$, получим уравнение $\cos 2t + \sin 2t = a - 1$, которое имеет решения при $|a-1| \le \sqrt{2}$.

2. $-7/4$.

3. $\left[-1; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{c^2S^2}{2S-c^2}}$.

Пусть $2a$ и $2b$ – длины сторон прямоугольника, d – расстояние от центра O окружности до диагонали AC. Суммируя площади треугольников ABO, BOC и AOC, получим, что

$$\pm d\sqrt{a^2+b^2} + ab + a^2 = 2ab$$

(знак «минус» соответствует случаю, когда точка O лежит вне треугольника ABC). Поэтому

$$d = \frac{\left|a^2 - ab\right|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

следовательно,

$$c^2 = 4\left(a^2 - d^2\right) = \frac{8a^3b}{a^2+b^2}.$$

В данном случае $a = r$, $b = \frac{S}{4r}$, так что

$$\frac{S^2c^2}{16r^2} = \left(2S - c^2\right)^2.$$

5. См. рис.15.

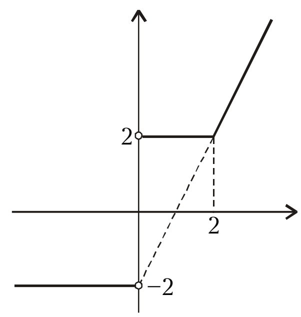


Рис. 15

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,3. **2.** −1. **3.** −2. **4.** −1. **5.** 5. **6.** 0. **7.** $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. **8.** $6-2\pi$.
9. −2. **10.** $\{1\} \cup \{\pi/2 + \pi k\}$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.** 0,1. **12.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$.
13. $(-\infty; -4] \cup [3; 4)$. **14.** $\pm 0{,}5$. **15.** $(2; 1)$, $\left(3/\sqrt{2}; 0{,}5\right)$.
16. $(-2; -1)$. **17.** $(-1; 0)$, $(0; 1)$. **18.** 16. **19.** $5\sqrt{3}$.
20. $a \in \{1; -9\}$.

Знакомьтесь: факультет наук о материалах

МАТЕМАТИКА

1. $\{0; 1\}$. **2.** $\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $(-2; -1] \cup [2; 3)$. **4.** $(3; 1/9)$. **5.** 2.
6. Утверждение неверно. **7.** 6 км/ч. **8.** 115 км/ч.
9. $\{-6; -5; -4\}$. **10.** $x = 1$ и $y = 3{,}25(1-x)$.

ФИЗИКА

1. $t = v_0(\sin\alpha \pm \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)/g$, $\beta \in [0; \alpha]$.
2. $P_{экв}/P_{пол} = 1 - 4\pi^2R^3/\left(GMT^2\right)$.
3. $A = 0{,}5V_0\left(p_2 - p_1\right)\left(p_0 - p_1 - p_2\right)/\left(p_0 - p_1\right)$.

4. $f_2 = f_1 p_1 T_2 / (p_2 T_1) \approx 29\%$. **5.** $\mathcal{E} = 3\Delta Q/C$.

6. $Q = a^2 B(4-\pi)/(\pi R)$. **7.** $v = 2{,}4 \cdot 10^5$ м/с.

8. На расстоянии 6 см от одного из источников.

XLI Международная математическая олимпиада

1. Пусть $K = MN \cap AB$. По теореме о касательной и секущей $AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$, следовательно, K – середина AB. Так как $PQ \| AB$, то M – середина PQ. Поэтому достаточно доказать, что $EM \perp PQ$.

Из параллельности CD и AB вытекает, что A и B – середины дуг CM и DM, т.е. ΔACM и ΔBDM – равнобедренные. Из сказанного следует, что $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$ и $\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$, т.е. точки E и M симметричны относительно прямой AB. Значит, прямая EM перпендикулярна AB, а следовательно, и PQ.

2. Положим $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz. \qquad (\&)$$

Мы пришли к хорошо известному неравенству (оно использовалось, например, при решении задачи М1333). Одно из возможных доказательств этого неравенства таково. Заметим, что среди чисел $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ не более одного отрицательного, так как сумма любых двух из них положительна. Если такое число одно, то $uvw \le 0 < xyz$. Если же $u, v, w \ge 0$, то достаточно перемножить три очевидных неравенства:

$$x^2 \ge x^2 - (y-z)^2,$$
$$y^2 \ge y^2 - (z-x)^2,$$
$$z^2 \ge z^2 - (x-y)^2.$$

Замечание 1. Из решения видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c = 1$.

Замечание 2. При $u, v, w > 0$ неравенство $(\&)$ можно, очевидно, сформулировать так: радиус вписанного круга произвольного треугольника не превосходит половины радиуса описанного круга.

3. *Ответ:* $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$.

Покажем сначала, что при указанных значениях λ мы можем увести всех блох так далеко вправо, как мы того пожелаем. Будем использовать следующую стратегию: на каждом прыжке выберем самую левую блоху и заставим ее прыгнуть через самую правую блоху. После k таких прыжков мы получим конфигурацию блох, для которой и обозначим через d_k максимальное, а через δ_k – минимальное расстояние между блохами. Очевидно, что $d_k \ge (n-1)\delta_k$. После $(k+1)$-го прыжка среди расстояний между соседними блохами появляется новое: λd_k. Может оказаться, что $\delta_{k+1} = \lambda d_k$. Если это не так, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$. В любом из этих случаев

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \ge \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \ge \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

Следовательно, если $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$ для всех k, т.е. наименьшее расстояние между блохами не убывает, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь, что при $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$ из любой начальной конфигурации мы не сможем увести всех блох далеко вправо никакой последовательностью прыжков. Введем на данной прямой систему координат. Пусть s_k – сумма координат всех блох после k-го прыжка в произвольной последовательности прыжков, а w_k – наибольшая из этих координат (т.е. координата самой правой блохи). Заметим, что $s_k \le n w_k$. После $(k+1)$-го прыжка блоха из точки A перепрыгнула через B и оказалась в C. Пусть координаты этих точек a, b, c соответственно. Тогда $s_{k+1} = s_k + c - a$. По условию $c - b = \lambda(b-a)$, т.е. $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Значит, $s_{k+1} - s_k = c - a = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$. Предположим, что $c > w_k$. Блоха, которая только что прыгнула, заняла новую крайнюю правую позицию $w_{k+1} = c$. Так как b – положение какой-то блохи после k-го прыжка, то $b \le w_k$. Следовательно,

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Эта оценка справедлива и в случае $c \le w_k$: $w_{k+1} - w_k = 0$, $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Пусть $z_k = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ Применяя сделанную выше оценку, получаем, что $z_{k+1} - z_k \le 0$. В частности, $z_k \le z_0$ для всех k. Мы рассматриваем $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, т.е. $1 + \lambda > n\lambda$. В этом случае $z_k = (n+\mu)w_k - s_k$, где $\mu = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Поэтому из неравенства

$$z_k = \mu w_k + (n w_k - s_k) \ge \mu w_k$$

следует, что $w_k \le \dfrac{z_0}{\mu}$ для всех k. Таким образом, положение самой правой блохи не превосходит некоторой константы (зависящей от n, λ и начального расположения блох, но не от последовательности ходов).

XXXI Международная физическая олимпиада

Задача 1

A: a) $y = L + \dfrac{mg}{k} + \sqrt{\dfrac{m^2 g^2}{k^2} + 2\dfrac{Lmg}{k}}$; b) $v_m = \sqrt{2gL + \dfrac{mg^2}{k}}$;

c) $t = \sqrt{\dfrac{2L}{g}} + \sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2kL/(mg)}}\right)$.

B: a) $T = \sqrt{T_1 T_2}$; b) $A_m = cm\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$;

c) $A_m = 20$ МДж.

C: a) ${}^{206}n = {}^{238}N\left(2^{t/4,5} - 1\right)$; b) ${}^{207}n = {}^{235}N\left(2^{t/0,71} - 1\right)$;

c) $1{,}20 \cdot 10^{-2} = \dfrac{2^{\tau/4,5} - 1}{2^{\tau/0,71} - 1}$; d) $\tau \approx 5{,}38 \cdot 10^9$ лет;

e) $\tau \approx 4{,}54 \cdot 10^9$ лет.

D: a) $E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ при $r \le R$, $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ при $r > R$;

b) $W = \dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

E: $t \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ с.

Задача 2

a) $\dfrac{e}{m} = \dfrac{8\pi^2 U}{B_0^2 D^2}$; b) область B;

c) $W_{\max} \approx 638$ кэВ; d) $e/m = 1{,}70 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Задача 3

A: a) $\mu \approx 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$; b) $\omega_0 \approx 8{,}1 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; c) $\delta l \approx 4 \cdot 10^{-6}$ м;

d) $\Delta l = \Delta g \dfrac{\rho l^2}{2E}$; e) $l_{\min} \approx 2 \cdot 10^8$ м.

В: b) $\alpha = 2$; c) $\theta = 4GM / \left(Rc^2\right) \approx 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ рад.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. $\angle EDA = 90^\circ - \angle ABC > 90^\circ - \angle ACB = \angle AED$.

2. Отразим трапецию относительно прямой AB (рис.16). Поскольку в любой трапеции отношение расстояний от точки пересечения диагоналей до оснований равно отношению длин этих оснований и поскольку $BC/AD = C'C/D'D$, то точка F является точкой пересечения диагоналей трапеции $D'DCC'$.

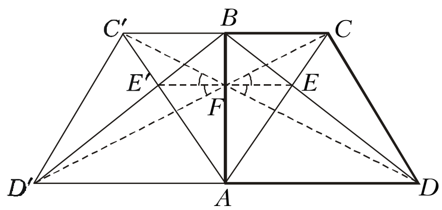


Рис. 16

3. Обозначив $y_n = x_{n+1} - x_n$, рассмотрите величину

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} =$$
$$= \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}} - x_{n+1} = \frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{x_n - x_{n+1}} = -\frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{y_n}.$$

Очевидно, y_{n+1} и y_n – числа разного знака. Следовательно, $y_1 = x_2 - x_1$ и $y_{1999} = x_{2000} - x_{1999}$ – числа одного знака, что невозможно в случае $x_{2000} = x_1 \ne x_2 = x_{1999}$.

4. Подставив во второе неравенство $x/3$ вместо x, докажите, что $f(x+1) = f(2x+1)$.

5. 4000. *Указание*. Сумма цифр числа a равна сумме цифр числа $2 \cdot 5a$.

6. а) Пусть Вася отметит 18 проводов, разбивающих столбы на пары, и не трогает отмеченные провода, пока это возможно. Тогда электрик каждый раз будет восстанавливать не более 34 проводов, ибо у каждого столба заведомо есть необорванный Васей провод. Таким образом, каждый день количество проводов будет уменьшаться как минимум на 1. Поскольку количество проводов не может уменьшаться неограниченно долго, когда-нибудь Васе придется порвать отмеченный провод. В этот момент во дворе останется не более 17 проводов.

б) Аналогично решению пункта а), можно добиться того, что после очередной приватизации останется не более 999 государственных авиалиний. Это менее 0,05% общего числа авиалиний.

7. Сначала индукцией по n докажите равенство сумм чисел, расположенных в углах прямоугольника размером $2 \times n$, а затем индукцией по m докажите то же для прямоугольника $m \times n$.

8. Предположив, что из некоторой усадьбы A нельзя добраться до усадьбы B, рассмотрите все усадьбы, до которых можно добраться из A, а также все остальные усадьбы (в число которых входит B), и подумайте, как должна быть устроена дорожная сеть.

9. *Указание*. Все числа, получающиеся из 41, дают остаток 4 при делении на 37.

10. Расставьте людей в вершинах правильного n-угольника и посылайте дежурить тройки людей, оказавшихся в вершинах равнобедренных треугольников, а если треугольник равносторонний (равносторонние треугольники встретятся, если n делится на 3), то пусть соответствующая тройка отдежурит трижды.

11. б) $2^{2000} - 2^{666}$.

12. а) Поскольку $\angle AB_1B = 90^\circ = \angle AA_1B$, то точки A, B_1, A_1 и B лежат на одной окружности (рис.17). По теореме о вписанном угле,

$$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle AEB_1.$$

Поскольку треугольник DA_1B_1 равнобедренный, его внешний угол ADB_1 вдвое больше угла DA_1B_1. Итак, $\angle ADB_1 = \angle AEB_1$, откуда и следует утверждение задачи.

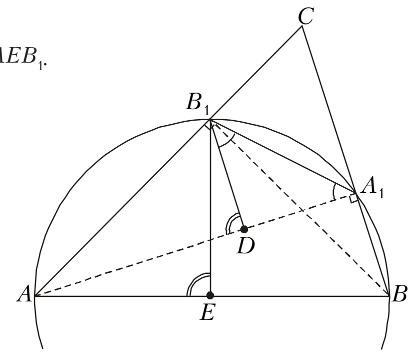


Рис. 17

б) Так как углы AB_1B и AA_1B прямые, точки A, B_1, A_1 и B лежат на окружности с центром K. В частности, $KA_1 = KB_1$, откуда KM – серединный перпендикуляр к A_1B_1. Значит, $A_1L = B_1L$, и можно применить утверждение пункта а).

13. Допустим, что такой набор чисел существует. Поскольку любое целое число x взаимно просто с числом $x^{2000} - x^{1000} + 1$, то $f(a_i)$ делится на a_j при всех $i \ne j$, причем

$$\text{НОД}(a_i, a_j) = 1.$$

Предположим для определенности, что a_1 – наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$. Тогда число $f(a_1)$, делясь на каждое из взаимно простых чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{2001}$, делится и на их произведение $a_2 a_3 \ldots a_{2001} > a_1^{2000}$, что противоречит неравенству $f(a_1) \le a_1^{2000}$. Следовательно, ответ на вопрос задачи отрицательный.

14. Предположим, что условие о точках пересечения выполнено. Поскольку на каждой прямой лежит 100 точек пересечения, то любая прямая пересекается со всеми остальными, причем никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Кроме того, все прямые пересекают ось ординат, причем в разных точках.

Пусть A и B – самая верхняя и самая нижняя из точек пересечения прямых с осью ординат, C – точка пересечения соответствующих прямых. Остальные 99 прямых пересекают отрезок AB, поэтому каждая из них пересекает одну из двух других сторон треугольника ABC. Значит, какую-то из сторон AC и BC (для определенности, сторону AC) пересекают не менее 50 прямых. Пересечения прямой AC с этими прямыми образуют вместе с точкой C множество из не менее чем 51 отмеченных точек, лежащих на прямой AC по одну сторону от оси ординат. Противоречие.

Другой способ решения основан на том, что каждая прямая $y = kx + b$ задается своим угловым коэффициентом k и точкой $(0; b)$ пересечения с осью ординат (будем называть эту точку «начальной точкой» прямой). Пусть l – прямая с наибольшим угловым коэффициентом. Очевидно, l пересекается справа от оси ординат с теми прямыми, начальные точки которых выше, чем l, а слева – с теми, начальные точки которых ниже. Значит, начальная точка прямой l должна быть средней среди начальных точек.

Рассмотрев прямую m с наименьшим коэффициентом наклона, аналогично доказываем, что и ее начальная точка – средняя в списке. Это невозможно, так как $l \ne m$, и начальные точки прямых l и m не могут совпадать.

15. Назовем числа, дающие остатки 0, 1 или 4 при делении на 5, *хорошими* (или квадратичными вычетами по модулю 5), а остальные числа (т.е. дающие остатки 2 или 3 при делении на 5) – *плохими.* Заметим, что всякая степень хорошего числа – снова хорошее число. Поэтому если второй игрок каждым своим ходом будет возводить любое хорошее число в степень, равную плохому числу (если такие останутся), то каждым своим ходом он будет уменьшать количество плохих чисел на 1. Поскольку плохих чисел меньше половины, наступит момент, когда на доске останутся только хорошие числа.

Следовательно, последнее число окажется хорошим, и второй игрок выиграет.

16. а) Поскольку прямая KL параллельна, а прямая MN перпендикулярна биссектрисе угла B треугольника, то $\angle MXL = 90°$. Обозначим $a = BC$ и $b = AC$. Как известно, длины AL и BM равны полупериметру треугольника ABC. Поэтому середины отрезков ML и AB совпадают, причем $ML = AL + BM - AB = a + b$. Пусть D – середина AB (и ML), E – середина AC. Так как DX – медиана прямоугольного треугольника MXL, то $DX = ML/2 = (a+b)/2$ и $\angle MDX = 2\angle MLX = \angle ABC$. Значит, прямая DX параллельна стороне BC и, следовательно, содержит среднюю линию DE. Значит, $EX = DX - DE = (a+b)/2 - a/2 = b/2 = EC$. Так как $EX \| BC$, то $\angle CEX = \angle ACB$, откуда $\angle ECX = \left(180^\circ - \angle ABC\right)/2 = \angle ACN/2$, что и требовалось доказать.

17. Эта задача в несколько иной формулировке (суммы вместо произведений) предлагалась в 1963 году на третьей Всероссийской математической олимпиаде (см. книгу Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад»). Решение можно получить, доказав по индукции, что произведение n различных натуральных чисел имеет не меньше $\frac{n(n-1)}{2}+1$ делителей. Интересно, что оценка $\frac{n(n-1)}{2}+1$ точная: она достигается для числа $N = p^{n(n-1)/2} = 1\cdot p\cdot p^2\cdot\ldots\cdot p^{n-1}$, где p – простое число.

19. Докажите, что ситуация, в которой любой ход ведет к проигрышу, может возникнуть только после хода второй авиакомпании.

20. Будем называть дополнительной клеткой уголка не принадлежащую ему клетку покрывающего его квадрата 2×2. Построим последовательность уголков, начав с любого уголка и выбирая каждый следующий так, чтобы он покрывал дополнительную клетку предыдущего. Рано или поздно эта последовательность зациклится. Все 111 уголков не могут входить в цикл, ибо количество уголков в цикле четно. (Чтобы доказать это, рассмотрите ломаную с вершинами в центрах квадратов 2×2, содержащих уголки.) Осталось убрать уголки, не входящие в цикл.

21. Предположим, что сумма чисел диагонали меньше 1. Тогда в каждой строке найдется клетка, в которой стоит число, большее, чем число, стоящее на пересечении вертикали, содержащей эту клетку, с главной диагональю. Такие клетки будем называть хорошими. Выберем любую клетку на главной диагонали и пойдем из нее по горизонтали в хорошую клетку, затем по вертикали снова на диагональ, затем опять в хорошую клетку, и т.д. Через некоторое время этот маршрут зациклится. Рассмотрим образовавшийся цикл. Поставим ладьи на главную диагональ, а затем каждую ладью, попавшую в цикл, сдвинем по вертикали на предыдущую в этом цикле клетку. Ясно, что ладьи по-прежнему не бьют друг друга. Но при этом число под каждой из сдвинутых ладей увеличилось, значит, и произведение чисел под ладьями увеличилось, что противоречит условию задачи.

22. Отразив ортоцентр H относительно L, получим точку H', лежащую на описанной окружности и диаметрально противоположную точке B. Отрезок $H'B$ перпендикулярен прямой l. Поэтому проекция точки L на прямую l есть середина отрезка между проекциями точек H' и H, а стало быть, она совпадает с серединой отрезка BK, что и значит, что треугольник BKL – равнобедренный.

23. Абсолютная величина горизонтальной проекции вектора скорости для каждого шарика постоянна и не превосходит 1 (равенство достигается, если шарик летает горизонтально). Следовательно, время между двумя последовательными ударами одного шарика о левую стенку не меньше 2. Поэтому есть промежуток между двумя последовательными ударами шариков о левую стенку длительностью не меньше 1 (равенство достигается лишь в случае, когда оба шарика летают горизонтально и в противофазе).

В случае, когда нашелся такой промежуток длительностью больше 1, паучок успевает спуститься по вертикали, достаточно близкой к левой стенке. Если же шарики летают горизонтально и среднюю вертикаль пересекают одновременно, то паучок может спуститься по средней вертикали.

Интересно было бы найти минимальную скорость, с которой должен двигаться паучок, если в квадрате летают не два, а n шариков.

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $v = \sqrt{(3L/4)g\cos\alpha + (g\tau\sin\alpha)^2}$.

2. $\alpha = \arccos(2/3) = 48^\circ$ (при вращении вектора в сторону стенки $\alpha = 0$).

3. Если зонд быстро замедляет свое движение и по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{\text{хар}} = 0{,}57v_0$; если же зонд, быстро увеличив скорость, удаляется на расстояние, много больше R_0, а затем, замедлив движение, по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{\text{хар}} = 0{,}41v_0$.

4. $F = 6Mg\mu\left(1+2\mu+3\mu^2\right)$. **5.** $M = 7p_0S/(3g)$.

6. $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$. **7.** $v = \sqrt{v_0^2 + Q^2/(12\pi\varepsilon_0 Rm)}$.

8. $L_{12} = L/\sqrt{2}$. **9.** $\eta = 1-(2/3)\ln 5/\left(5^{2/3}-1\right)$.

10. $n = 3D^2/(16F\lambda)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати

142300 г.Чехов Московской области

Заказ №