d) $\Delta l = \Delta g \dfrac{\rho l^2}{2E}$;   e) $l_{\min} \approx 2 \cdot 10^8$ м.

В: b) $\alpha = 2$; c) $\theta = 4GM/\left(Rc^2\right) \approx 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ рад.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. $\angle EDA = 90^\circ - \angle ABC > 90^\circ - \angle ACB = \angle AED$.

2. Отразим трапецию относительно прямой AB (рис.16). Поскольку в любой трапеции отношение расстояний от точки пересечения диагоналей до оснований равно отношению длин этих оснований и поскольку $BC/AD = C'C/D'D$, то точка F является точкой пересечения диагоналей трапеции $D'DCC'$.

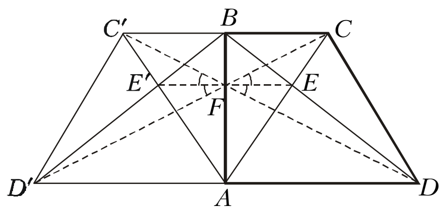

Рис. 16

3. Обозначив $y_n = x_{n+1} - x_n$, рассмотрите величину

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} =$$

$$= \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}} - x_{n+1} = \frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{x_n - x_{n+1}} = -\frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{y_n}.$$

Очевидно, y_{n+1} и y_n – числа разного знака. Следовательно, $y_1 = x_2 - x_1$ и $y_{1999} = x_{2000} - x_{1999}$ – числа одного знака, что невозможно в случае $x_{2000} = x_1 \neq x_2 = x_{1999}$.

4. Подставив во второе неравенство $x/3$ вместо x, докажите, что $f(x+1) = f(2x+1)$.

5. 4000. *Указание*. Сумма цифр числа a равна сумме цифр числа $2 \cdot 5a$.

6. а) Пусть Вася отметит 18 проводов, разбивающих столбы на пары, и не трогает отмеченные провода, пока это возможно. Тогда электрик каждый раз будет восстанавливать не более 34 проводов, ибо у каждого столба заведомо есть необорванный Васей провод. Таким образом, каждый день количество проводов будет уменьшаться как минимум на 1. Поскольку количество проводов не может уменьшаться неограниченно долго, когда-нибудь Васе придется порвать отмеченный провод. В этот момент во дворе останется не более 17 проводов.

б) Аналогично решению пункта а), можно добиться того, что после очередной приватизации останется не более 999 государственных авиалиний. Это менее 0,05% общего числа авиалиний.

7. Сначала индукцией по n докажите равенство сумм чисел, расположенных в углах прямоугольника размером $2 \times n$, а затем индукцией по m докажите то же для прямоугольника $m \times n$.

8. Предположив, что из некоторой усадьбы A нельзя добраться до усадьбы B, рассмотрите все усадьбы, до которых можно добраться из A, а также все остальные усадьбы (в число которых входит B), и подумайте, как должна быть устроена дорожная сеть.

9. *Указание*. Все числа, получающиеся из 41, дают остаток 4 при делении на 37.

10. Расставьте людей в вершинах правильного n-угольника и посылайте дежурить тройки людей, оказавшихся в вершинах равнобедренных треугольников, а если треугольник равносторонний (равносторонние треугольники встретятся, если n делится на 3), то пусть соответствующая тройка отдежурит трижды.

11. б) $2^{2000} - 2^{666}$.

12. а) Поскольку $\angle AB_1B = 90^\circ = \angle AA_1B$, то точки A, B_1, A_1 и B лежат на одной окружности (рис.17). По теореме о вписанном угле,

$$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle AEB_1.$$

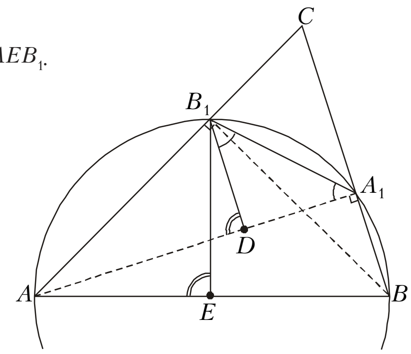

Рис. 17

Поскольку треугольник DA_1B_1 равнобедренный, его внешний угол ADB_1 вдвое больше угла DA_1B_1. Итак, $\angle ADB_1 = \angle AEB_1$, откуда и следует утверждение задачи.

б) Так как углы AB_1B и AA_1B прямые, точки A, B_1, A_1 и B лежат на окружности с центром K. В частности, $KA_1 = KB_1$, откуда KM – серединный перпендикуляр к A_1B_1. Значит, $A_1L = B_1L$, и можно применить утверждение пункта а).

13. Допустим, что такой набор чисел существует. Поскольку любое целое число x взаимно просто с числом $x^{2000} - x^{1000} + 1$, то $f(a_i)$ делится на a_j при всех $i \neq j$, причем

$\text{НОД}(a_i, a_j) = 1$.

Предположим для определенности, что a_1 – наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$. Тогда число $f(a_1)$, делясь на каждое из взаимно простых чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{2001}$, делится и на их произведение $a_2 a_3 \ldots a_{2001} > a_1^{2000}$, что противоречит неравенству $f(a_1) \leq a_1^{2000}$. Следовательно, ответ на вопрос задачи отрицательный.

14. Предположим, что условие о точках пересечения выполнено. Поскольку на каждой прямой лежит 100 точек пересечения, то любая прямая пересекается со всеми остальными, причем никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Кроме того, все прямые пересекают ось ординат, причем в разных точках.

Пусть A и B – самая верхняя и самая нижняя из точек пересечения прямых с осью ординат, C – точка пересечения соответствующих прямых. Остальные 99 прямых пересекают отрезок AB, поэтому каждая из них пересекает одну из двух других сторон треугольника ABC. Значит, какую-то из сторон AC и BC (для определенности, сторону AC) пересекают не менее 50 прямых. Пересечения прямой AC с этими прямыми образуют вместе с точкой C множество из не менее чем 51 отмеченных точек, лежащих на прямой AC по одну сторону от оси ординат. Противоречие.

Другой способ решения основан на том, что каждая прямая $y = kx + b$ задается своим угловым коэффициентом k и точкой $(0; b)$ пересечения с осью ординат (будем называть эту точку «начальной точкой» прямой). Пусть l – прямая с наибольшим угловым коэффициентом. Очевидно, l пересекается справа от оси ординат с теми прямыми, начальные точки которых выше, чем l, а слева – с теми, начальные точки которых ниже. Значит, начальная точка прямой l должна быть средней среди начальных точек.

Рассмотрев прямую m с наименьшим коэффициентом наклона, аналогично доказываем, что и ее начальная точка – средняя в списке. Это невозможно, так как $l \neq m$, и начальные точки прямых l и m не могут совпадать.

15. Назовем числа, дающие остатки 0, 1 или 4 при делении на 5, *хорошими* (или квадратичными вычетами по модулю 5), а остальные числа (т.е. дающие остатки 2 или 3 при делении на 5) – *плохими.* Заметим, что всякая степень хорошего числа – снова хорошее число. Поэтому если второй игрок каждым своим ходом будет возводить любое хорошее число в степень, равную плохому числу (если такие останутся), то каждым своим ходом он будет уменьшать количество плохих чисел на 1. Поскольку плохих чисел меньше половины, наступит момент, когда на доске останутся только хорошие числа.