$\sigma = q\big/\left(4\pi a^2\right)$, поле внутри отсутствует, а снаружи равно $E = k \cdot 4\pi\sigma = kq/a^2$. Тогда

$$p = \frac{qE}{2} = \frac{kq^2}{8\pi a^4}, \quad \eta = \frac{11{,}2a^2\sqrt{8\pi p/k}}{eN_{\text{A}}}; \; 6\cdot 10^{-8}.$$

5. Сумма сил нормального давления $2N\sin\alpha$ выталкивает упаковку, а сумма сил трения $2F\cos\alpha = 2\mu N\cos\alpha$ ее удерживает (здесь 2α – угол раствора ножниц). Угол α для упаковки таков, что $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$ вплоть до ее полного выскальзывания. Поскольку толщина пластинки много меньше диаметра упаковки, равенство $\sin\alpha = \mu\cos\alpha$ для пластинки достигается на некотором расстоянии от конца ножниц. В этом случае сила трения покоя препятствует выскальзыванию: $2N\sin\alpha = 2F\cos\alpha < 2\mu N\cos\alpha$.

Вариант 2

1. $l_0 = \left(m_1 l_2 + m_2 l_1\right)\big/\left(m_1 + m_2\right)$.

2. Из того, что треугольник равнобедренный, а заряды и массы частиц в вершинах острых углов одинаковы (рис.9), следует, что гипотенуза в процессе движения переносится параллельно, т.е. движется поступательно, увеличиваясь в размерах. Если найдется условие, при котором один из катетов тоже переносится параллельно, то подобие будет обеспечено. Скорость и ускорение частиц с массой m удобно разложить по направлениям катета и гипотенузы. Из построения видно, что катет переносится параллельно, если в любой момент времени $v_M \cos 45^\circ = v_2 \cos 45^\circ$, т.е. $v_M = v_2$, и, следовательно, $a_M = a_2$. Из закона Кулона и последней связи получаем

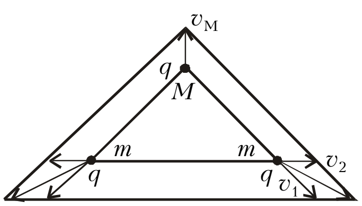

Рис. 9

$$M = 2\sqrt{2}m.$$

3. Так как напряжение на катушке равно $U_L = L\Delta I/\Delta t$, в момент, когда ток максимален, напряжение на ней равно нулю, а напряжение на конденсаторах будет одним и тем же – обозначим его через U. Суммарный заряд на верхних (и на нижних) пластинах конденсаторов сохраняется. Если заряды одноименные, то

$$q = C_1U_1 + C_2U_2 = \left(C_1 + C_2\right)U,$$

откуда

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

Искомый ток определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{\left(C_1 + C_2\right)U^2}{2},$$

откуда

$$I = \left|U_1 - U_2\right|\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

Если же на верхних пластинах разноименные заряды, то

$$I = \left(U_1 + U_2\right)\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

4. Простейшая модель – две точечные массы $M_З/2$ находятся на расстояния радиуса Земли $R_З$ друг от друга. Тогда по закону всемирного тяготения

$$F \approx GM_З^2\big/\left(4R_З^2\right) = M_З g/4 = \rho_З\, \pi g R_З^3/3 \approx 1{,}5\cdot 10^{25}\ \text{Н}$$

при $g = 10$ м/с^2, $R_З \approx 6{,}4\cdot 10^6$ м, $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м$^3\big/\left(\text{с}^2\cdot\text{кг}\right)$, $\rho_З \approx 5{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.

Можно оценить силу через давление на Земле, считая ее недра несжимаемой жидкостью:

$$F; \; pS; \; \rho_З g R_З \pi R_З^2; \; 5\cdot 10^{25}\ \text{Н}.$$

Вариант 3

1. $x = d\sin\alpha\big/\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$.

2. $m = 2\alpha p_0 lSh\Big/\left(g\left(\alpha\left(l^2 - h^2\right) - h^2\right)\right)$.

3. После включения поля в системе возникнут гармонические колебания. Сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, поэтому сохраняется импульс:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0,$$

а центр масс остается неподвижным. Максимальные значения скоростей тел достигаются одновременно в тот момент, когда их ускорения, а следовательно, и действующие на них силы равны нулю. Если смещения тел в момент прохождения равновесия равны x_1 и x_2, то по закону Гука

$$qE = k\left(x_1 - x_2\right).$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = qE\left(x_1 - x_2\right) - \frac{k\left(x_1 - x_2\right)^2}{2}.$$

Отсюда получаем максимальные значения скоростей:

$$v_{1m} = qE\sqrt{\frac{m_2}{km_1\left(m_1 + m_2\right)}}, \quad v_{2m} = qE\sqrt{\frac{m_1}{km_2\left(m_1 + m_2\right)}}.$$

4. Для экватора, например, $\Delta T/T; \; 0{,}82$.

5. Вначале, при небольшом погружении, стержень вертикален и его равновесие устойчиво. Затем при малых отклонениях стержня от вертикали возникают моменты сил, которые не возвращают его в вертикальное положение, а содействуют дальнейшему отклонению. Неустойчивость вертикального положения возникает при условии

$$L - l < L\sqrt{1 - \rho/\rho_{\text{в}}},$$

где L – длина стержня, l – глубина его погружения, ρ – плотность материала стержня, $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды. При этом сила натяжения нити еще не равна нулю, и, потеряв вертикальную устойчивость, стержень занимает наклонное положение. По мере дальнейшего подъема уровня воды стержень будет наклоняться все сильнее, пока не займет устойчивое горизонтальное положение, при котором сила натяжения нити равна нулю.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in (0;\, n)$;

б) $g(x) = 4x - x^2$, $x \in (0;\, 4)$ (рис.10);

в) $a \in \{0\} \cup [1;\, 3)$.

2. $x > 1$.

3. $(-1)^k \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\sqrt{3}a^2$.

5. $\dfrac{H^3 \sin 2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta}{3}$.

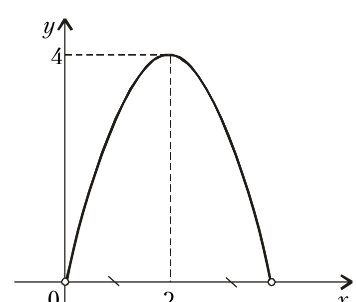

Рис. 10