ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_0 = gt/2 - H/t$. **2.** $A = \dfrac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$.

3. $\rho = \big(U(\mathcal{E} - U) - Pr\big)/(2lP)$. **4.** $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{p_1V_1T_2}{p_2V_2T_1} = 14{,}1\%$.

5. $f = -\dfrac{d|F|}{d + |F|} = -4{,}8$ см, изображение мнимое.

Вариант 2

1. $a = v_0^2/(2s)$. **2.** $A = 2mgH - mv^2/2$.

3. $U = \left(\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Pr}\right)/2$.

4. $m = (p_1/T_1 - p_2/T_2)V\mathrm{M}/R = 9\cdot 10^{-6}$ кг. **5.** $F = -L(L - l)/l$.

Вариант 3

1. $t = 2s/v_0$. **2.** $A' = 2mgL\sin\alpha + A$. **3.** $r = (\mathcal{E} - U)/I$.

4. $m = p_н(V_0 - V)\mathrm{M}/(RT) = 0{,}002$ кг. **5.** $s = FL/(F - L)$.

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 50 дней. **2.** $\pm\left((-1)^n\dfrac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. $7/2$. **4.** $(-1; 1)$.

5. -1; 1. *Указание.* Пусть $y = kx + 1$ – уравнение прямой AB. Так как

$$|x| - x = \begin{cases} 0 \text{ при } x \ge 0, \\ -2x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

имеем $-2 < k < 0$,

$$x_A = \frac{-1}{2+k} \text{ и } y_A = \frac{2}{2+k}$$

(рис.4), $y_B = 0$, $x_B = \dfrac{-1}{k}$. Площадь треугольника OAB равна

$$S = \frac{1}{2}x_B y_A = \frac{1}{-k(2+k)}.$$

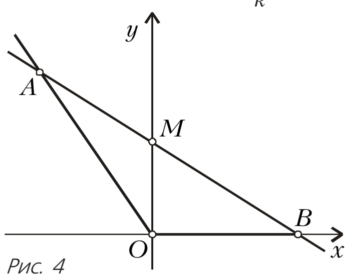

Рис. 4

Наибольшее значение знаменателя этой дроби равно 1 при $k = -1$.

6. $x = y = a + \sqrt{1 - a^2}$ при $a \in \left(-1/\sqrt{2};\, 1/\sqrt{2}\right] \cup \{1\}$.

Указание. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = x,\ x > 0, \\ x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень.

7. 1; $\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, а параллелограмм PC_1QA – его сечение (рис.5). Площадь этого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника APC_1, причем высота PK треугольника не меньше длины общего перпендикуляра скрещивающихся прямых DD_1 и AC_1, так что минимальную площадь имеет сечение, для которого $PK \perp DD_1$, $PK \perp AC_1$. Проекцией отрезка PK на плоскость $ABCD$ служит высота DL треугольника ACD. Ясно, что $PQ < AC_1$, так что $AC_1 = 6$, $PQ = 2\sqrt{3}$. Вычисляя отрезки $PK = DL = \sqrt{3}/2$, $OK = 3/2$, получаем, что $CL/LA = 1/3$. Положив $CL = x$, из соотношения $DL^2 = CL\cdot LA$ находим x, а затем AD и CD.

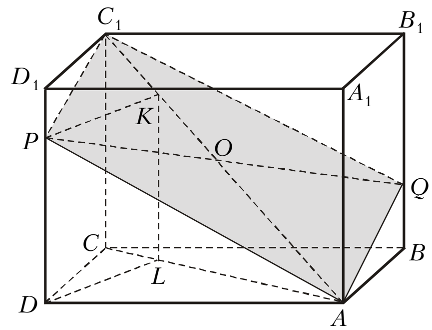

Рис. 5

Вариант 2

1. 8 мин, 9 мин. **2.** $(-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. 9. **4.** $(0; 1) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

5. 1; 8. *Указание.* Прямая $y = kx$ пересекает график квадратного трехчлена при

$$x_{1,2} = 2(k-2) \pm \sqrt{4k^2 - 16k + 20},$$
$$y_{1,2} = 2(k-2)k \pm k\sqrt{4k^2 - 16k + 20}.$$

Квадрат расстояния между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равен $16\left((k-1)^4 + 4\right)$, откуда минимум расстояния равен 8 при $k = 1$.

6. $x_{1,2} = \left(5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$ при $a \in (-\infty; -15) \cup (0; 1]$;

$x_1 = \left(5 - a + \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$, $x_2 = 1 - \sqrt{a}$ при $a \in (1; +\infty)$.

Указание. При $x \ge 0$ получаем уравнение

$$5x^2 - 2(5-a)x + 5(1-a) = 0, \qquad (\&)$$

имеющее два различных неотрицательных корня при

$$a < -15 \text{ и } 0 < a \le 1.$$

При этом

$$x_{1,2} = \frac{5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}}{5}.$$

Уравнение (&) имеет один неотрицательный корень при $a = 0$ (тогда $x = 1$) и $a = -15$ ($x = 4$), а также при $a > 1$. При $x < 0$ получим уравнение

$$(x-1)^2 = a,$$

имеющее один отрицательный $\left(x = 1 - \sqrt{a}\right)$ и один положительный $\left(x = 1 + \sqrt{a}\right)$ корень при $a > 1$.

7. $\dfrac{S}{3\pi}$. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед (рис.6). Проведем $(B_2D_2) \| BD$, $A \in (B_2D_2)$ и $CF \perp (B_2D_2)$, тогда $FC_1 \perp (B_2D_2)$ и

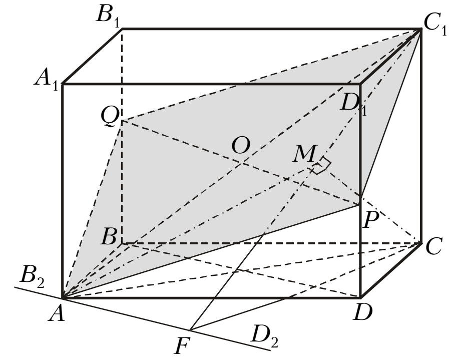

Рис. 6