Есть такая функция!

Профессор логики упомянул во время лекции, что, насколько ему известно, ни в одном естественном языке два утверждения никогда не означают отрицания. Из задних рядов раздалось саркастическое: "Ну да, конечно!".

Существует ли многочлен, все значения которого – положительные числа, причем среди этих значений есть сколь угодно малые числа? Да, существует! Правда, это многочлен не от одной, а от нескольких переменных:

$$f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2.$$

Почему? Во-первых, сумма квадратов всегда неотрицательна. Во-вторых, эта сумма не может равняться нулю, поскольку равенства $x = 0$ и $xy = 1$ несовместны. В-третьих, рассмотрев $x = 1/n$ и $y = n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, убеждаемся, что величина $x^2 + (xy-1)^2 = 1/n^2$ может быть сколь угодно малой.

В 1890 году Джузеппе Пеано (1858–1932) поразил мир кривой, которая целиком покрывает некоторый квадрат (т.е. проходит через все точки этого квадрата, причем через некоторые – по нескольку раз). Простой пример кривой Пеано построил в 1891 году Давид Гильберт (1862–1943). Первые пять шагов этой красивой конструкции показаны на рисунках. Как видите, на n-м шаге Гильберт разбивает отрезок $[0;1]$ на 4^n равных отрезочков, которые извилисто размещаются по одному в каждом из 4^n равных квадратиков. Чтобы определить образ любой данной точки t отрезка $[0;1]$, нужно для каждого натурального числа n разбить отрезок $[0;1]$ на отрезочки длиной $1/4^n$, отметить, какому из них принадлежит точка t (или каким двум – если точка t попала в точности на границу), и построить соответствующий квадрат Δ_n со стороной $1/2^n$. Образуется последовательность квадратов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$

$\ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, общая точка которых – образ точки t.

Существует ли:

а) разрывная во всех точках функция, модуль которой – непрерывная функция;

б) функция, непрерывная лишь в точке $x = 0$ и разрывная во всех других точках;

в) функция, среди значений которой на любом (сколь угодно малом) интервале есть сколь угодно большие значения;

г) непостоянная периодическая функция, среди положительных периодов которой нет наименьшего;

д) функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках;

е) не монотонное ни на каком интервале взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками;

ж) определенная на $[0;1]$ функция $g(x)$, множеством значений которой является отрезок $[0;1]$ и множество значений которой не меняется при ограничении на любой интервал? (Поскольку последнее условие довольно трудно для восприятия, поясню: для любого числа $0 \le y \le 1$ множество решений уравнения $g(x) = y$ должно быть всюду плотно на отрезке $[0;1]$.)

Наверное, сейчас читателю стоит остановиться и самому придумать соответствующие примеры: ответ на все эти вопросы утвердительный. А если все примеры придуманы или прошло уже слишком много времени – читайте дальше.

Вот ответы на поставленные вопросы.

а) Годится функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

б) Такова функция $xf(x)$, где $f(x)$ – функция из п.а).

в) Например, функция, которая равна 0 для любого иррационального x и равна n для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, $\text{НОД}(m, n) = 1$.

г) Годится функция $f(x)$ из п. а). Впрочем, в большинстве учебников математического анализа рассматривают не ее, а функцию Дирихле (1805–1859)

$$D(x) = \frac{1 + f(x)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

д) Например, функция Римана (1826–1866), которая равна 0 для любого иррационального x и равна $1/n$ для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, $\text{НОД}(m, n) = 1$. Можно доказать (хотя для школьника это доказательство довольно сложно и лучше его оставить до студенческих времен), что не существует функции, непрерывной во всех рациональных и разрывной во всех иррациональных точках.

е) Рассмотрите функцию из п. б) на отрезке $[-1; 1]$.

ж) Такую функцию впервые построил Анри Леон Лебег (1875–1941). Пусть $0 \le x \le 1$ и

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

– десятичное представление числа x.