χ_k^1 одного переменного так, чтобы для функции $f_1(x,y) = f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} \chi_k^1(\Phi_k(x, y))$ (где $(\Phi_k(x, y))$ – функции, построенные в п.2) было выполнено соотношение $\max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)| \le \frac{5}{6} M$ и при этом $\max_{(x,y)\in Q} |\chi_k(\Phi_k(x,y))| \le \frac{1}{3} M$.

Для этого выберем ранг l таким, чтобы разность наибольшего и наименьшего значений функции f на любом квадрате Q_{ij}^{kl} была не больше $\frac{M}{6}$. Положим теперь функцию χ_k на интервале δ_{ij}^{kl} равной одной трети значения, которое принимает функция f в некоторой (все равно какой) точке квадрата Q_{ij}^{kl}. И продолжим функцию χ_k по линейности. Тогда нетрудно показать, что функция f_1 будет удовлетворять нужному условию. А далее наши построения следует повторять.

Этим завершается доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях. Тринадцатой проблеме Гильберта посвящена очень интересная популярная статья В.И.Арнольда «О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных», опубликованная в сборнике «Математическое просвещение» (вып.3, М.: Физмалит, 1958).

Детерминизм и хаос

Скажем еще о третьем направлении, связанном с творчеством Колмогорова пятидесятых годов, – о теории динамических систем и детерминированном хаосе.

Случайные явления изучает теория вероятностей. В этой теории считается, что случайный механизм, предопределяющий статистическую неопределенность, задан априори, и цель – изучать статистику развития процесса и делать прогнозы. Простейшим примером случайного процесса может служить продуцирование последовательностей из нулей и единиц с помощью бросания монеты или шестигранной кости. Совокупность всех таких последовательностей $\xi = (\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ (их называют *бернуллиевскими*) характеризуется тем, что вероятность того, что на n местах $(i_1, \ldots, i_n)$ стоит m единиц, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где p – вероятность выпадения единицы (равная $1/2$ в случае бросания монеты и $1/6$ при бросании кости). Еще в 1713 году Яков Бернулли обнаружил фундаментальный факт, связанный с бернуллиевскими процессами: число выпадений единиц «в среднем» равняется вероятности p появления единицы при бросании. Этот факт называют *законом больших чисел.* Мы уже имели повод сказать, что поведение многих детерминированных процессов напоминает хаотическое движение. Для подобных детерминированных процессов доказываются аналоги теорем типа закона больших чисел. (Скажем, можно ставить вопрос о средней частоте солнечных затмений.)

Новое осмысление явления детерминированного хаоса, отчетливое понимание связи между неустойчивостью динамики и стохастическими свойствами соответствующих динамических систем возникло после появления работы Колмогорова, где было введено понятие энтропии динамической системы.

Среди людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать московских математиков В.М.Алексеева, Д.В.Аносова, Я.Г.Синая. Детерминированному хаосу посвящена статья Я.Г.Синая в «Математическом просвещении» (сер. 3, вып.5, М.: МЦНМО, 2001).

Обобщенные функции

Перейдем к некоторым темам, которые в пятидесятые-шестидесятые годы развивались в школе И.М.Гельфанда.

В начале пятидесятых годов до нас дошли первые слухи о том, что произошло расширение понятия функции: появились *обобщенные* функции. При этом они, в частности, обладали многими чудесными свойствами; например, все оказывались бесконечно дифференцируемыми. Автором нового функционального исчисления был французский ученый Лоран Шварц, опубликовавший в начале 50-х годов свой труд «Теория распределений». (Шварц был удостоен филдсовской медали в 1950 году.)

Еще чуть ли не за 60 лет до того английский физик и инженер Хевисайд ввел своеобразную функцию (которую впоследствии называли δ-функцией). Эта функция обладала невозможными свойствами: она всюду равнялась нулю, кроме одной точки (в которой ее значение равнялось бесконечности), а интеграл от этой функции по всей прямой был равен единице. Хевисайд свободно оперировал с этой функцией (в частности, раскладывал ее в ряд Фурье и т.п.). Математики, конечно, посмеивались над такими причудами. А в тридцатые годы с подобной функцией стал работать великий физик Дирак, но снова полного понимания, что бы это могло значить, у математиков не было.

Новые необычные функции Шварц назвал распределениями, у нас их стали называть обобщенными функциями. Гельфанд писал: «После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность». Теория Шварца сделала возможным придать точный смысл и δ-функции Хевисайда – Дирака.

Вскоре после того, когда до нас дошли первые отголоски теории, построенной Шварцем, выяснилось, что основы по сути дела той же теории были созданы в середине тридцатых годов нашим соотечественником Сергеем Львовичем Соболевым.

Основы теории Соболева – Шварца легче всего объяснить на окружности. Обобщенные функции на окружности T – это *линейные непрерывные функционалы на пространстве бесконечно дифференцируемых* 2π*-периодических функций.* Линейным функционалом на функциональном векторном пространстве называется такой функционал, который сопоставляет любой функции f из пространства комплексное число $l(f)$ так, что сумме функций сопоставляется сумма соответствующих чисел $(l(f_1 + f_2) = l(f_1) + l(f_2))$ и произведению af функции f на число a сопоставляется число $al(f)$. Пространство бесконечно дифференцируемых функций называют пространством *основных функций.*

Для того чтобы говорить о непрерывности, надо определить понятие сходимости в пространстве основных функций. Говорят, что последовательность f_n основных функций сходится к основной функции f, если для любого k функции $f_n^{(k)}$ сходятся к $f^{(k)}$ равномерно. Функционал l на пространстве основных функций называется *непрерывным*, если из сходимости f_n к f следует сходимость $l(f_n)$ к $l(f)$. Так вот, совокупность всех непрерывных линейных функционалов