Как в землю казан закопали

А.СТАСЕНКО

ПОИСТИНЕ В ФИЗИКЕ МОЖНО найти применение всему. Так, если у вас есть старый казан (полусферическая кастрюля), не выбрасывайте его, а вкопайте в землю. Затем подключите казан к одной из клемм источника напряжения U, а к другой его клемме подсоедините идеальный длинный провод, который постарайтесь заземлить подальше, желательно на бесконечности (см. рисунок).

Рано или поздно в проводах (отходящем от батареи к казану и подходящем к ней из бесконечности) установится постоянный ток I. Точно такой же ток должен течь от казана в земле – ведь заряды не создаются и не уничтожаются, причем этот поток зарядов должен быть одинаковым через любую полусферу радиусом r и, следовательно, площадью $2\pi r^2$. Все это следствия закона сохранения заряда. А вот плотность тока (т.е. ток через единицу площади поверхности) должна уменьшаться по мере удаления от казана (и, следовательно, увеличения поверхности полусферы).

Если считать картину сферически (точнее, полусферически) симметричной, то плотность тока равна

$$j_e = \frac{I}{2\pi r^2}. \qquad (1)$$

Но что же вызывает движение зарядов в каждой точке проводящей среды? Конечно, локальное электрическое поле. Причем плотность тока $\vec{j_e}$ прямо пропорциональна напряженности поля $\vec{E}$, а коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом электропроводности* σ:

$$\vec{j_e} = \sigma \vec{E}. \qquad (2)$$

Обратная σ величина называется удельным электрическим сопротивлением:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}.$$

Эти коэффициенты очень полезны в электротехнике. Так, если у вас есть кусок проволоки длиной l с поперечным сечением S из материала с удельным электрическим сопротивлением ρ, то его сопротивление R легко найти по формуле

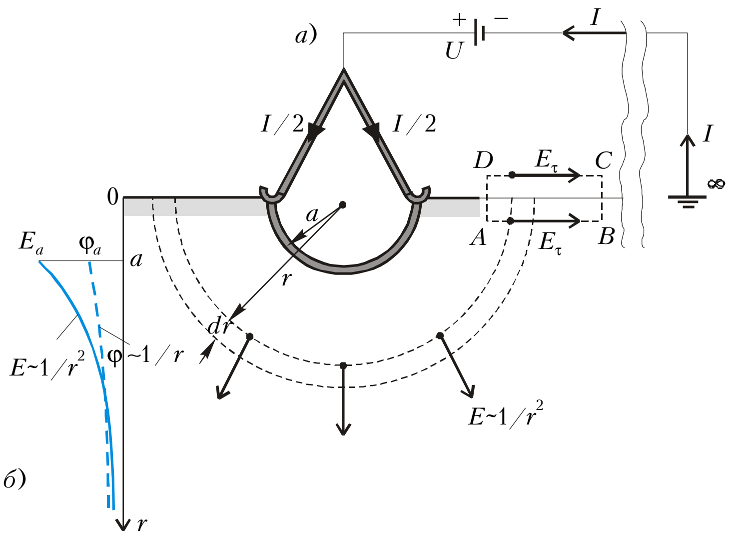
$$R = \frac{l}{S}\rho = \frac{l}{S\sigma}.$$

А эта величина связывает разность потенциалов (напряжение) U, приложенную к концам проволоки, и постоянный ток, который потечет в ней:

$$U = IR. \qquad (3)$$

Но полубесконечное пространство проводящей земли под казаном ($a \le r < \infty$) вовсе не похоже на кусок проволоки. Как бы найти его суммарное сопротивление?

Вспомним, что напряженность электрического поля есть сила, действующая на единичный заряд. Если этот заряд поле перемещает на расстояние dr, то оно совершает при этом работу $E \cdot dr$ (здесь учтено, что в рассматриваемом случае вектор поля $\vec{E}$ направлен вдоль перемещения $\vec{dr}$). А какая работа необходима для того, чтобы «протащить» через единицу площади



поверхности в единицу времени заряд, численно равный j_e? С помощью выражений (1) и (2) получим (в вольтах!)

$$dA = \frac{I}{2\pi r^2\sigma}dr. \qquad (4)$$

Будем считать, что провода и металлический казан – идеальные проводники (не оказывают сопротивления току), а удельная проводимость земли постоянна в пространстве. Тогда вся работа на пути от $r = a$ (поверхность казана) до $r \to \infty$ получится в результате интегрирования выражения (4):

$$A = \frac{I}{2\pi\sigma}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma a}.$$

Но кто совершает эту работу? Конечно же, источник напряжения:

$$A = U.$$

Сравнивая с (3), получим

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}.$$

Выходит, что суммарное электрическое сопротивление всего полубесконечного пространства с заданным коэффициентом σ зависит только от радиуса казана a.

Итак, в рассматриваемом случае однородной электропроводящей среды существует радиальное поле с напряженностью E; $1/r^2$ (как бы от точечного заряда, помещенного в центре казана) и постоянный ток с плотностью j_e; $1/r^2$ $(a \le r < \infty)$. Движение зарядов вызывается разностью потенциалов $U = \varphi_a - \varphi_\infty$. Но что такое потенциал в точке r? Он тесно связан с работой поля по перемещению единичного заряда, которую мы уже упоминали выше:

$$d\varphi = -dA = -Edr. \qquad (5)$$

Значит,

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Отсюда легко найти радиальную зависимость потенциала:

$$\varphi(r) - \varphi_a = -\int_a^r Edr =$$

$$= -\frac{I}{2\pi\sigma}\int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (6)$$

Проверим так называемые граничные условия: при $r = a$ получаем $\varphi(r) = \varphi_a$; при $r \to \infty$ имеем $\varphi_\infty - \varphi_a = -\frac{I}{2\pi a\sigma} = -U$. Таким образом, формулу (6) можно записать также в виде

$$\frac{\varphi(r) - \varphi_\infty}{\varphi_a - \varphi_\infty} = \frac{a}{r}. \qquad (7)$$

Понятно также, зачем взят знак «минус» в формуле (5) – чтобы радиальная зависимость потенциала имела вид горки (см. рис. *б*), по склону которой положительные заряды «скатываются» в область меньших значений φ (как санки с ледяной горы). Кстати, теперь легко объяснить, почему от упавшего на землю высоковольтного провода нужно уходить очень мелким шагом: ведь вблизи него потенциал резко меняется с расстоянием, и при обычном шаге между ногами может возникнуть очень большая разность потенциалов – так называемое шаговое напряжение.

Отметим, что в «новых» терминах соотношение (2) примет вид

$$j_e = -\sigma\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (8)$$

Но что творится над землей? Если считать, что воздух не проводит электричество, т.е. положить $\sigma = 0$, то в воздухе не будет и электрического тока: $j_e = 0$. А электрическое поле? Рассмотрим прямоугольный контур $ABCD$ (см. рис. *а*), верхняя сторона которого расположена над землей, нижняя – в земле, а боковые стороны очень (ну, очень!) малы. Если протащить некоторый заряд по этому (замкнутому) контуру (например, в указанном порядке расположения букв), то суммарная работа обязана равняться нулю – ведь в этом контуре нет никаких источников тока, а электростатическое поле потенциально. Это значит, что если поле существует в земле, то оно обязано быть и в воздухе около земли. Более того, тангенциальная (касательная) составляющая этого поля E_τ вне земли (направленная вдоль стороны DC) должна в точности равняться тангенциальной составляющей поля в земле (направленной вдоль стороны AB). Заметим, что здесь ничего не сказано о нормальной составляющей электростатического поля на поверхности земли. Она может существовать, может испытывать скачок на поверхностных зарядах (так же, как нормальная – радиальная – составляющая поля терпит разрыв на зарядах, расположившихся на поверхности казана). Поэтому у поверхности раздела воздух – земля линии напряженности электростатического поля могут быть искривлены.

А что если взять два казана, сложить их в виде сферы и закопать поглубже – тогда, может быть, электрическое поле станет совсем сферически симметричным? Ну хотя бы в некоторой окрестности этого Двухказанья, еще далеко от поверхности? Но и тут вопрос: а провод, подводящий ток, – не нарушает ли он этой прекрасной симметрии? Вот и подумайте. Секрет развития науки в том и состоит, что, ответив на один вопрос, она ставит другие.

Теперь подойдем к казану с другой точки зрения. Представим себе, что он наполнен кипятком, температура которого T_a поддерживается постоянной. Тогда в окружающей почве установится стационарное распределение температуры, и тепловая энергия будет постоянно «течь» от казана на бесконечность, где температура равна T_∞. Иначе говоря, поток тепловой энергии между казаном и бесконечностью обеспечивается разностью температур $T_a - T_\infty$. Значит, по аналогии с электричеством, температуру можно назвать потенциалом, а плотность теплового потока j_T выразить соотношением типа (8):

$$j_T = -\lambda \frac{dT}{dr}, \qquad (9)$$

где λ – *коэффициент теплопроводности* среды.

И это еще не все. Представим себе, что казан «равномерно дырявый», и некий добрый человек поддерживает в нем постоянный уровень супа. Тогда содержимое казана плотностью $\rho_{\text{супа}}$ будет диффундировать через почву, и рано или поздно установится стационарное распределение этого вещества в пространстве. Ясно, что около казана почва плотностью ρ будет больше насыщена супом, а чем дальше – тем меньше. Тут уместно ввести понятие массовой доли диффундирующего вещества $C = \rho_{\text{супа}}/\rho$. Будем считать, что эта величина всюду много меньше единицы («слабый раствор»), хотя и меняется в пространстве. Тогда, по аналогии с двумя ранее рассмотренными случаями, можно сказать, что поток диффундирующего вещества обеспечивается разностью потенциалов $C_a - C_\infty$, а в каждой его точке плотность потока j_m выражается соотношением типа (8) и (9):

$$j_m = -D \frac{dC}{dr}, \qquad (10)$$

где D – *коэффициент диффузии* (или, если угодно, *массопроводности*) среды.

И вот теперь – самое замечательное. Все рассмотренные распределения так называемых потенциалов можно записать совершенно одинаково (!):

$$\frac{\varphi(r) - \varphi_\infty}{\varphi_a - \varphi_\infty} = \frac{T(r) - T_\infty}{T_a - T_\infty} = \frac{C(r) - C_\infty}{C_a - C_\infty} = \frac{a}{r}. \qquad (11)$$

И суммарные потоки соответствующей физической субстанции – заряда I, тепловой энергии Q_T, массы Q_m – тоже можно записать одинаково:

$$I = \frac{1}{R}\left(\varphi_a - \varphi_\infty\right),$$

$$Q_T = \frac{1}{R_T}\left(T_a - T_\infty\right),$$

$$Q_m = \frac{1}{R_m}\left(C_a - C_\infty\right),$$

где видны уже знакомое суммарное сопротивление электрическому току

$$R = \frac{1}{2\pi a\sigma},$$

а также сопротивления потоку тепла и массы

$$R_T = \frac{1}{2\pi a\lambda} \text{ и } R_m = \frac{1}{2\pi a D}.$$

А какая из всего этого польза? Очень большая. Например, вы хотите узнать распределение температуры или концентрации вещества в гораздо более сложной ситуации, чем рассмотренная нами (достаточно симметричная). Скажем, в случае слоистой земли, в которой встречаются к тому же полости, валуны и другие неоднородности. Тогда, пользуясь *электро-тепло-массовой аналогией*, рассмотренной нами, можно распределение температуры или концентрации смоделировать распределением электрического потенциала в среде с таким же распределением коэффициента электропроводности, как и пространственные распределения коэффициентов теплопроводности или диффузии (массопроводности). Измерение токов и разностей потенциалов – более простая проблема, чем измерение температур и концентраций, да и установление электрических полей происходит быстрее. И такое экспериментальное оборудование можно собрать «на столе». Подобные «аналоговые» установки использовались в прикладной физике до развития мощной вычислительной техники. Но и с ее развитием аналогии физических процессов не потеряли смысла – только теперь они понимаются как *одинаковость уравнений и их решений при одинаковых граничных условиях.* Лучше всего эту мысль иллюстрирует цепочка равенств (11).

Итак, если у вас есть старый котел или казан – не выбрасывайте, а ... подумайте о физике.