Решения задач M1736—M1740, Ф1748—Ф1757

M1736. *Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?*

На рисунке 1 приведено расположение 16 коней, удовлетворяющее условию задачи. Покажем, что большее число

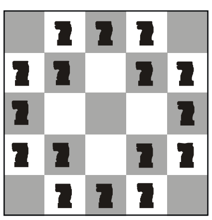


Рис.1

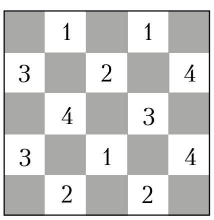


Рис.2

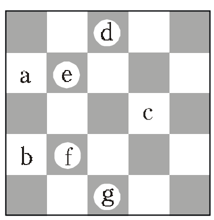


Рис.3

коней расставить нельзя. Заметим, что количество коней, расположенных на черных клетках, равно количеству коней, расположенных на белых клетках. Значит, если число пустых белых клеток равно n, то число пустых черных клеток равно $n + 1$.

Заметим, что для оптимального расположения коней центральная клетка пуста, так как в противном случае из восьми клеток, которые бьет конь, стоящий на центральном поле, ровно шесть пустых белых. Отсюда $n \geq 6$, и число коней не превосходит

$$25 - n - (n+1) \leq 12.$$

Разобьем белые клетки на четыре группы так, как показано на рисунке 2 (клетки одной группы отмечены одинаковыми цифрами). Покажем, что для оптимального расположения по крайней мере одна клетка каждой группы пуста, отсюда будет следовать, что $n \geq 4$. Предположим противное: например, что на всех клетках группы 3 стоят кони. Обозначим их буквами a, b и c (рис.3). Конь, стоящий на клетке a, бьет клетки f, d и центральную. Но, как было показано выше, центральная клетка пуста, значит, на клетках f и d стоят кони. Аналогично можно показать, что на клетках e и g тоже стоят кони. Но тогда конь, стоящий на клетке c, бьет четырех коней, расположенных на d, e, f и g, что противоречит условию.

Итак, число пустых белых клеток $n \geq 4$. Значит, число коней не больше

$$25 - n - (n+1) \leq 16.$$

М.Горелов

M1737. *Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K (рис.1). Точки M, N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD. Докажите, что $OMKN$ – параллелограмм.*

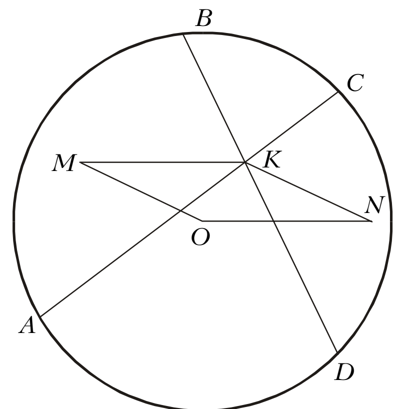


Рис.1

Пусть X – середина KB (рис.2). Тогда $\angle KMX = \frac{1}{2}\angle KMB = \angle KAB = \angle KDC$. Поскольку $MX \perp BD$, то $KM \perp CD$. Так как при этом $ON \perp CD$, то $ON \| KM$. Аналогично, $OM \| KN$.

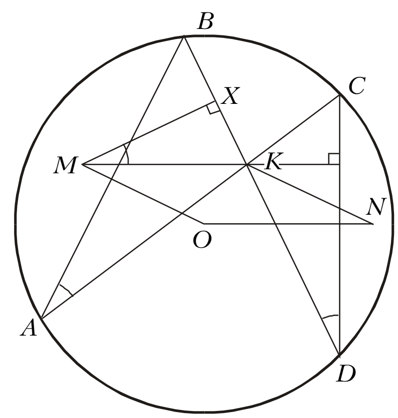


Рис.2

Если точки O, K, M, N не лежат на одной прямой, то $OMKN$ – параллелограмм и $OM = KN$. В противном случае рассмотрим ортогональные проекции отрезков OM и KN на AC. Так как точки O, M, N проектируются, соответственно, в середины отрезков AC, AK, KC, то проекции обоих параллельных отрезков равны $KC/2$. Следовательно, равны и длины самих отрезков.

А.Заславский

M1738. *Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту*

а) спрятали;

б) отдали постороннему наблюдателю.

Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом посторонний наблюдатель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит?

Назовем игроков Гришей и Лешей, а наблюдателя – Колей.

а) Пусть Гриша скажет: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты, которых у него нет}». После этого Леша должен сказать: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты Гриши, если второй из наборов, названных Гришей, не совпадает с его набором, и любые другие три карты, которых у него нет, в противном случае}». После этого каждый из них, очевидно, знает весь расклад. Коле же ничего не ясно. Действительно, названо три набора карт: A, B и C. Наборы B и C пересекаются по двум картам, Гриша сказал: «У меня либо A, либо B», Леша сказал: «У меня либо A, либо C». Это означает, что либо у Гриши набор A, а у Леши – C, либо у Гриши – B, а у Леши – A. Конечно, эти расклады различны, и даже закрытую карту определить нельзя.

б) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может все определить. Занумеруем карты числами от 0 до 6. Пусть Гриша и Леша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7. Тогда они узнают расклад: каждый из них должен лишь прибавить к своей сумме сумму другого и найти остаток, противоположный этой общей сумме по модулю 7 (т.е. такой, который при прибавлении к этой сумме дает число, делящееся на 7). Это и будет номер закрытой карты. После этого восстановление расклада не составляет труда. Проверим, что Коля ничего не узнал. Рассмотрим карту с номером s. Покажем, что она могла попасть к Грише, если он назвал сумму a. Для этого надо дополнить эту карту двумя другими с суммой номеров $a - s$. Легко видеть, что существует три различные пары номеров, дающие в сумме $a - s$. Из них две, возможно, испорчены тем, что туда входит карта с номером s или закрытая карта, но как минимум одна пара остается. Ею мы и дополним набор Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Леши.

А.Шаповалов

М1739. *Пусть А – произвольная четная цифра, Б – произвольная нечетная цифра. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 2^{2000}, каждая цифра которого – либо А, либо Б.*

Укажем способ составления из цифр A и $Б$ числа, делящегося на 2^n для любого натурального n. Обозначим такое число G_n. При $n = 1$ полагаем $G_n = G_1 = A$.

Пусть построено число G_k при $n = k \ge 1$. Воспользуемся им при построении следующего числа G_{k+1}, делящегося на 2^{k+1}.

Если G_k делится на 2^{k+1}, то полагаем $G_{k+1} = G_k$, в противном случае построим вспомогательное число F_k, обладающее следующими свойствами: число F_k составлено из цифр A и $Б$, делится на 2^k и имеет в своей десятичной записи ровно k цифр.

Если G_k имеет в своей записи ровно k цифр, то полагаем $F_k = G_k$.

Если в записи G_k более k цифр, положим F_k равным числу, получающемуся из G_k отбрасыванием старших цифр, начиная с $(k+1)$-й. По признаку делимости на 2^k, полученное из G_k после такой операции число F_k будет также делиться на 2^k.

Если в записи G_k менее k цифр, припишем к числу G_k слева его же несколько раз таким образом, чтобы в результате получилось число, в записи которого не менее k цифр. Это число делится на G_k и, следовательно, на 2^k. Если из него отбросить все старшие цифры, начиная с $(k + 1)$-й, то в результате получим число F_k, которое, по признаку делимости на 2^k, также делится на 2^k.

Если число F_k делится на 2^{k+1}, то полагаем $G_{k+1} = F_k$, в противном случае полагаем $G_{k+1} = \overline{БF_k}$, приписав к числу F_k число $Б$ слева. Положив $F_k = 2^k p$, где p – некоторое нечетное число, получаем $G_{k+1} = 10^k Б + 2^k p = 2^k\left(5^k Б + p\right)$. В скобках стоит четное число, поэтому G_{k+1} делится на 2^{k+1}.

И.Акулич, А.Жуков

М1740. *Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Докажите, что каждое из четырех чисел ab, bc, ca и ab + bc + ca является квадратом.*

Можно записать:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca, \qquad (*)$$

или иначе:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca).$$

Значит, число $ab + bc + ca$ является квадратом.

Равенство $(*)$ можно истолковать как квадратное уравнение относительно c.

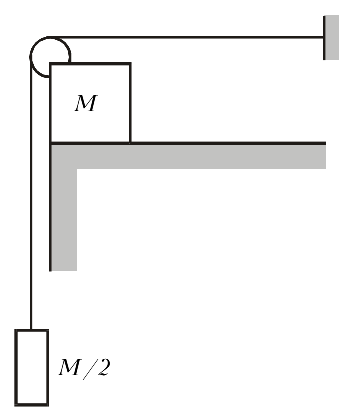
Поэтому

$$c = (a + b) \pm 2\sqrt{ab}.$$

Значит, число ab является квадратом. Точно так же убеждаемся, что числа bc и ca – тоже квадраты.

В.Произволов

Ф1748. *На краю гладкого горизонтального стола удерживают куб массой $M = 2$ кг (см. рисунок). Через небольшой гладкий выступ на ребре куба переброшена длинная легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой привязан груз массой $M/2$. Куб отпускают. Найдите его смещение за время $\tau = 0{,}2$ с. Длина свисающего участка нити $L = 2$ м. Привязанный к стене кусок нити практически горизонтален.*



Заданный в условии интервал времени мал, это позволяет решить задачу без особых затруднений (иначе задачу просто нельзя будет решить, разве что приближенно).

Будем считать, что свисающий кусок нити с грузом на конце практически вертикален. Обозначим силу натяжения нити (с двух сторон невесомого блока силы натяжения одинаковы) буквой T. Ускорение груза, обозначим его величину буквой a, направлено вниз, а ускорение куба направлено вправо и по величине тоже равно a, поскольку сумма длин горизонтального и вертикального кусков нити неизменна. Запишем уравнения движения тел:

$$0{,}5Mg - T = 0{,}5Ma, \quad T = Ma.$$

Отсюда находим

$$a = g/3.$$

За время τ смещение груза вниз составит

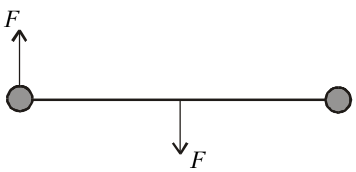
$$\frac{a\tau^2}{2} = \frac{g\tau^2}{6} = 6{,}7 \text{ см}.$$

На такую же величину сместится вправо куб.

Угол отклонения нити от вертикали определяется отношением смещения куба к длине свисающего куска нити – видно, что угол получится малым и отклонением нити от вертикали вполне можно пренебречь. Заметим, что длина свисающей части нити в ответ не входит и нужна именно для оценки величины угла – лишь бы он оказался малым.

Р.Блоков

Ф1749. *На гладком столе покоится гантелька длиной L, состоящая из невесомого жесткого стержня и маленьких одинаковых шариков массой M каждый, закрепленных на концах стержня (см. рисунок). В некоторый момент на гантельку начинают действовать две горизонтальные противоположно направленные силы величиной F, перпендикулярные стержню. Одна из них приложена к центру стержня, другая – к одному из шариков (силы все время остаются перпендикулярными к стержню и приложенными в упомянутых точках). Как будет двигаться стержень? За какое время стержень повернется на угол 360°? Чему будет равна сила натяжения стержня в этот момент?*



Сразу отметим, что сумма действующих на тело сил все время равна нулю, следовательно, ускорение центра масс равно нулю и середина стержня остается неподвижной – гантелька лишь вращается относительно этой точки.

Для вращения важен только результирующий вращательный момент сил, и можно упростить рассмотрение, немного изменив силы. Приложим их к шарикам на концах (увеличив вдвое «плечо»), но зато уменьшим их до $F/2$. Тогда движение рассчитать совсем просто. Касательное ускорение каждого шарика будет равно $a = F/(2M)$, и длину полной окружности диаметром L шарик пройдет за время τ, определяемое из соотношения $a\tau^2/2 = \pi L$, откуда

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\pi LM}{F}}.$$

К концу этого интервала шарик приобретет скорость $v = a\tau$. Нормальное ускорение шарика, равное $v^2/R = v^2/(L/2)$, определяется только силой натяжения стержня T. Отсюда находим

$$T = \frac{Mv^2}{R} = \frac{2Mv^2}{L} = 2\pi F.$$

А.Зильберман

Ф1750. *В центре днища прямоугольной баржи длиной a = 80 м, шириной b = 10 м и высотой c = 5 м образовалось отверстие диаметром d = 1 см. Оцените время, за которое баржа затонет, если не откачивать воду. Баржа открыта сверху, груза на ней нет, начальная высота бортов над уровнем воды h = 3,75 м.*

Так как действующая на баржу выталкивающая сила равна весу вытесненной ею воды, при заполнении баржи сила со стороны воды вне баржи будет расти пропорционально количеству затекшей воды.

Покажем сначала, что при погружении баржи разность уровней воды внутри и вне баржи не будет изменяться со временем. Обозначим массу самой баржи через m. Тогда условие плавания баржи, в которой нет воды, имеет вид

$$mg = \rho gab(c-h),$$

где ρ – плотность воды. Пусть баржа погрузилась так, что высота ее бортов над поверхностью воды стала h_1, а толщина слоя воды внутри баржи стала l. Теперь условие плавания принимает вид

$$mg + \rho gabl = \rho gab(c-h_1).$$

Из записанных уравнений получаем

$$c - h_1 - l = c - h,$$

т.е. разность уровней воды внутри и вне баржи в любой момент времени (пока баржа плавает) постоянна и равна разности высоты баржи и высоты борта непротекающей баржи. Следовательно, вода будет поступать в баржу с постоянной скоростью. Рассчитаем ее с помощью уравнения Бернулли.

Примем уровень поверхности воды в водоеме за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Тогда для трубки тока, которая начинается на уровне воды в водоеме и заканчивается на срезе отверстия в дне, можно записать

$$p_0 - \rho g(c - h_1 - l) + \frac{\rho v^2}{2} = p_0,$$

где p_0 – атмосферное давление, v – скорость воды в момент ее затекания в баржу. Уравнение Бернулли записано с учетом того, что площадь поверхности воды внутри баржи много больше площади отверстия, поэтому скорость подъема уровня воды много меньше скорости v и ею можно пренебречь. Таким образом, для скорости затекания воды в баржу получаем

$$v = \sqrt{2g(c-h_1-l)} = \sqrt{2g(c-h)}.$$

Баржа затонет тогда, когда ее борта сравняются с поверхностью воды, т.е. когда уровень воды над полом баржи достигнет величины h. В этот момент внутри баржи будет содержаться объем воды

$$V = abh = Sv\Delta t,$$

где $S = \pi d^2/4$ – площадь отверстия, Δt – искомое время. Отсюда окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{4abh}{\pi d^2\sqrt{2g(c-h)}} \approx$$

$$\approx 7{,}6\cdot 10^6 \text{ с} \approx 2111 \text{ ч} \approx 88 \text{ сут} \approx 3 \text{ мес}.$$

С.Варламов

Ф1751. *На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой M с насаженной на него маленькой бусинкой массой m. В начальный момент времени бусинка* *имеет скорость v, а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.*

Поскольку в начальный момент времени кольцо покоится, начальная скорость бусинки направлена по касательной к кольцу. Направим ось X лабораторной системы отсчета K вдоль скорости бусинки v, а ось Y этой системы координат проведем через бусинку и центр кольца. Перейдем в систему отсчета K_1, связанную с центром масс кольца и бусинки, и договоримся, что оси X_1, Y_1 сонаправлены с осями X, Y. Эта система отсчета движется относительно системы K со скоростью

$$u = \frac{mv}{m+M}.$$

В системе отсчета K_1 бусинка и центр кольца совершают равномерные движения по окружностям, центры которых совпадают с центром масс. При этом в начальный момент времени проекции скорости бусинки на оси X_1 и Y_1 равны, соответственно,

$$v_{x_1}(0) = v - u = v - \frac{mv}{m+M} = \frac{Mv}{m+M}$$

и

$$v_{y_1}(0) = 0,$$

а с течением времени изменяются следующим образом:

$$v_{x_1} = \frac{Mv}{m+M}\cos\omega t \text{ и } v_{y_1} = \frac{Mv}{m+M}\sin\omega t,$$

где ω – некоторая частота.
Возвращаясь в систему отсчета K, получим проекции скорости бусинки на оси X и Y:

$$v_x = \frac{Mv}{m+M}\cos\omega t + \frac{mv}{m+M} \text{ и } v_y = \frac{Mv}{m+M}\sin\omega t.$$

Кинетическая энергия бусинки равна

$$E_k = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{M^2v^2}{(m+M)^2}\cos^2\omega t + \frac{2mMv^2}{(m+M)^2}\cos\omega t + \frac{m^2v^2}{(m+M)^2} + \frac{M^2v^2}{(m+M)^2}\sin^2\omega t\right) =$$
$$= \frac{mv^2}{2(m+M)^2}\left(M^2 + m^2 + 2mM\cos\omega t\right).$$

Она становится минимальной в тот момент времени, когда косинус принимает значение –1. Следовательно,

$$E_{k\min} = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

Р.Компанеец

Ф1752. *Газ с молярной массой $\mathrm{M} = 60$ г/моль находится в герметичном сосуде с жесткими стенками и поддерживается при постоянной температуре $T = 0$ °C. Площадь поперечного сечения молекул, которые можно рассматривать как твердые шарики, равна $S = 10^{-19}$ м^2. Давление газа в начале эксперимента $p_0 = 100$ Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы, поглотившие квант света, переходят в возбужденное состояние. Среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-3}$ с. При столкновении двух возбужденных молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается $N = 10^{12}$ молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на $\varepsilon = 1\%$ от первоначального.*

При указанных в условиии задачи температуре, молярной массе и давлении молекулы движутся со средними скоростями

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mathrm{M}}} \approx 337 \text{ м/с},$$

значит, за время своей жизни τ возбужденная молекула пролетает расстояние

$$L = v\tau \approx 3{,}4\cdot10^{-1} \text{ м}.$$

Объем, в котором летящая молекула может за это время столкнуться с другими молекулами, равен $V \approx 4LS$. Концентрация невозбужденных молекул в сосуде перед началом освещения равна

$$n = \frac{p_0 N_\text{А}}{RT} \approx 2{,}7\cdot10^{22} \text{ м}^{-3},$$

где $N_\text{А}$ – постоянная Авогадро, R – универсальная газовая постоянная. Концентрация же возбужденных молекул составляет

$$n_\text{в} = \tau N\cdot10^6 \approx 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Одна возбужденная молекула за свое время жизни τ могла бы столкнуться с другими возбужденными молекулами ν_1 раз, причем

$$\nu_1 = Vn_\text{в} = 4v\tau Sn_\text{в}.$$

Значит, всего за это время в одном кубическом метре между возбужденными молекулами происходит

$$\nu = \frac{1}{2}\nu_1 n_\text{в} = 2v\tau Sn_\text{в}^2 \approx 0{,}68\cdot10^{11} \text{ м}^{-3}$$

столкновений. Коэффициент $1/2$ появляется здесь из-за того, что столкновения парные, т.е. в каждом участвуют две молекулы. При каждом таком столкновении одна молекула исчезает, поэтому скорость убывания концентрации равна

$$\beta = \frac{\nu}{\tau} = 2vSn_\text{в}^2 \approx 6{,}8\cdot10^{13} \text{ м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Давление в сосуде уменьшится на $\varepsilon = 1\% = 0{,}01$ тогда, когда на такую же величину уменьшится концентрация молекул n. Это произойдет через время

$$t = \frac{\varepsilon n}{\beta} \approx 4\cdot10^6 \text{ с} \approx 46 \text{ сут}.$$

Следует отметить, что ответ носит оценочный характер, т.е. время вычислено по порядку величины. Это связано с тем, что в расчетах более правильно использовать не среднюю, а среднюю относительную скорость движения молекул. Однако, ввиду того что эти скорости отличаются друг от друга не очень сильно (примерно в 1,4 раза),

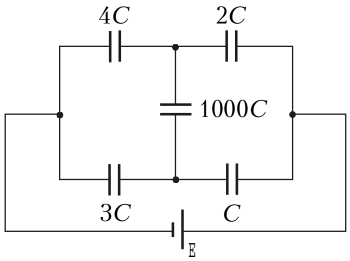


Рис.1

полученную оценку можно считать вполне удовлетворительной.

С.Варламов

Ф1753. *Оцените установившийся заряд на конденсаторе емкостью 1000 С в схеме, изображенной на рисунке 1.*

Из закона сохранения заряда следует, что заряды, образовавшиеся на всех конденсаторах, примерно одинаковы (по порядку величины). Однако разность потенциалов между обкладками конденсатора $1000C$ (точнее – емкостью $1000C$), ввиду его большой емкости, очень мала по сравнению с разностями потенциалов между обкладками других конденсаторов. Поэтому в нулевом приближении можно считать, что вместо конденсатора $1000C$ в схеме имеется проводящая перемычка. Тогда схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке 2.

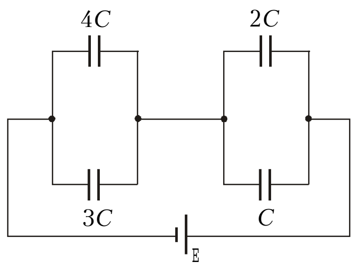


Рис.2

Пусть U_1 – напряжение на конденсаторах C и $2C$, U_2 – напряжение на конденсаторах $3C$ и $4C$. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд, находящийся на соединенных друг с другом обкладках конденсаторов, равен нулю, т.е.

$$3CU_2 + 4CU_2 = CU_1 + 2CU_1,$$

откуда получаем

$$U_2 = \frac{3}{7}U_1.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2,$$

находим

$$U_1 = 0{,}7\mathcal{E},\ U_2 = 0{,}3\mathcal{E}.$$

Теперь, после того как мы оценили величины напряжений на маленьких конденсаторах, можно вернуться к исходной схеме и оценить накопленный конденсаторами заряд. Заряд на конденсаторе $3C$ приближенно равен

$$q_1 = 3CU_2 = 0{,}9\mathcal{E}C,$$

а заряд на конденсаторе C –

$$q_2 = CU_1 = 0{,}7\mathcal{E}C.$$

Таким образом, заряд, накопленный конденсатором $1000C$, равен

$$q \approx q_1 - q_2 = 0{,}2\mathcal{E}C.$$

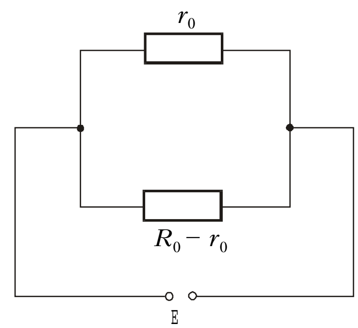
Отметим, что полученная нами оценка величины заряда очень близка к точному ответу

$$q = \frac{\mathcal{E}C}{5 + 12/1000},$$

который можно получить, аккуратно проведя все необходимые вычисления. Видно, что оценочный результат отличается от точного не более чем на 0,2%.

О.Шведов

Ф1754. *Резисторы сопротивлениями R, 2R, 3R, … …, 100R соединены последовательно. Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов, идущих от батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$ нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?*



Если второй провод, идущий от батарейки, подключен между резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$, то схему можно представить в виде, показанном на рисунке, где

$$R_0 = R + 2R + \ldots + 100R = \frac{100 \cdot 101}{2}R,$$

$$r_0 = R + 2R + \ldots + nR = \frac{n(n+1)}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через батарейку, равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_0} + \frac{\mathcal{E}}{R_0 - r_0} = \frac{\mathcal{E}R_0}{r_0(R_0 - r_0)}.$$

Минимально возможное значение силы тока I можно искать разными способами. Наиболее формальный из них состоит в следующем. Рассмотрим знаменатель последней формулы как квадратный трехчлен

$$y(r_0) = -r_0^2 + r_0R_0.$$

Известно, что квадратный трехчлен вида $y(x) = ax^2 + bx + c$ достигает экстремума при $x = -b/(2a)$. В нашем случае $y(r_0)$ достигает максимума при $r_0 = R_0/2$. Отсюда получаем условие на величину n:

$$\frac{n(n+1)}{2}R = \frac{100 \cdot 101}{2 \cdot 2}R,$$

которое сводится к квадратному уравнению

$$n^2 + n - 5050 = 0.$$

Решая его, находим

$$n \approx 70{,}565.$$

Поскольку n может принимать только целые значения, в качестве ответа следует принять наиболее близкое целое число, т.е. $n = 71$.

Другой способ отыскания минимума выражения для силы тока состоит в алгебраическом преобразовании знаменателя и приведении его к следующему виду:

$$r_0(R_0 - r_0) = \left(\frac{R_0}{2} + \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right)\left(\frac{R_0}{2} - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{R_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)^2.$$

Видно, что знаменатель представим в виде разности двух величин, одна из которых постоянна, а другая зависит от r_0. Понятно, что знаменатель достигает максимума (а сила тока – минимума) тогда, когда второе слагаемое обращается в ноль, т.е. при $\tilde{r}_0 = R_0/2$. Далее ход решения аналогичен описанному раньше.

Итак, второй провод от батарейки следует подключить между 71-м и 72-м резисторами.

О.Шведов

Ф1755. *Катушка индуктивностью L подключена параллельно конденсатору емкостью C, а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью C. К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением U_0. Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.*

Сумма напряжений конденсаторов постоянна и равна напряжению батарейки U_0, поэтому в тот момент, когда заряд (напряжение) одного из них максимален, заряд другого минимален, и наоборот. В эти моменты токи зарядки (или разрядки) конденсаторов равны нулю, следовательно, и ток через катушку в эти моменты нулевой.

Обозначим заряд уединенного конденсатора Q, а соединенного параллельно с катушкой – q. Тогда можно записать уравнения

$$\frac{Q}{C} + \frac{q}{C} = U_0,\ \frac{Q^2}{2C} + \frac{q^2}{2C} = QU_0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$Q = CU_0\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ q = \pm\frac{CU_0}{\sqrt{2}}.$$

В числах, чуть округляя, получим максимальное значение заряда уединенного конденсатора $1{,}7CU_0$, а конденсатора, соединенного с катушкой, $0{,}7CU_0$.

Для нахождения максимального тока через катушку заметим, что в момент максимальности тока ЭДС индукции катушки обращается в ноль, параллельно подключенный конденсатор оказывается незаряженным, а второй конденсатор имеет напряжение U_0. Тогда для энергии запишем

$$\frac{LI_m^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = CU_0U_0.$$

Отсюда найдем

$$I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Через большое время ток через катушку прекратится, параллельный конденсатор будет разряжен, второй конденсатор будет заряжен до напряжения батарейки. Из энергетического соотношения

$$\frac{CU_0^2}{2} + W_{\text{тепл}} = CU_0U_0$$

находим искомое количество теплоты:

$$W_{\text{тепл}} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

З.Рафаилов

Ф1756. *Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба провода). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?*

Непосредственный расчет токов и напряжений в кабеле сильно выходит за рамки школьной программы. Но задачу можно решить, заменив кабель эквивалентной схемой, содержащей множество одинаковых звеньев (рис.1), каждое из которых состоит из катушки индуктивности и конденсатора (так сказать, порежем кабель на маленькие кусочки). Если, например, длина такого кусочка равна 1 м, то индуктивность катушки будет 1 мкГн, а емкость конденсатора составит 25 пФ, при кусочках длиной 2 м индуктивность будет 2 мкГн, а емкость составит 50 пФ. Видно, что выбор наш не вполне произволен: если взять кусок побольше, то в разных частях этого куска напряжения и токи будут иметь существенно различные фазы, и этим уже нельзя будет пренебрегать. Поэтому будем заранее считать кусочки маленькими, а в процессе решения выясним разумность нашей модели.

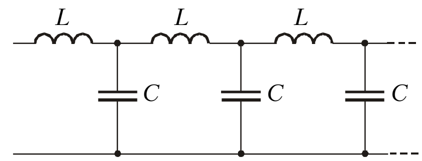


Рис.1

Итак, обозначим буквами L и C индуктивность и емкость одного звена (предполагаем эти величины малыми). В идеальном кабеле нет потерь энергии, поэтому амплитуда переменного напряжения не должна изменяться от ячейки к ячейке (как и амплитуда тока, разумеется), а частота колебаний пусть будет ω (в условии задачи упомянута «низкочастотная» волна, значит, ω должна быть малой, а в процессе решения мы посмотрим – по сравнению с чем). Разность токов соседних катушек равна току конденсатора, включенного между ними, разность напряжений между соседними конденсаторами равна напряжению на катушке, которая включена между ними (на рисунке

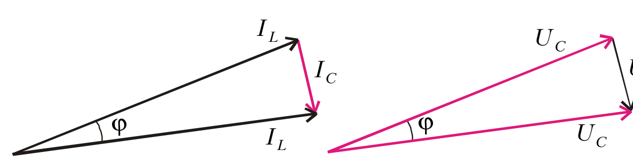


Рис.2

2 на векторных диаграммах токов и напряжений относящиеся к конденсаторам векторы нарисованы красным). Треугольники токов и напряжений подобны, малые углы при вершине каждого из них равны φ, тогда для малых углов можно записать

$$I_C = I_L\varphi,\ U_L = U_C\varphi.$$

Как обычно, соотношения между токами и напряжениями для гармонических колебаний имеют вид

$$U_C = I_CX_C,\ U_L = I_LX_L,$$

где $X_C = 1/(\omega C)$ и $X_L = \omega L$. Выразим отсюда значение угла φ:

$$\varphi = \omega\sqrt{LC}\,.$$

Видно, что при малых частотах угол получается и в самом деле малым, достаточно взять $\omega ? \; 1/\sqrt{LC}$ – при малых значениях индуктивности и емкости «малая частота» получается довольно большой. В нашем случае $\omega ? \; 1/\sqrt{LC} = 2\cdot 10^8$ 1/с, или в привычных нам герцах получается $3\cdot 10^7$ Гц, т.е. частота может достигать нескольких десятков миллионов герц – не так уж и мало... Запаздывание в расчете на одну ячейку составляет $\tau = \varphi/\omega = \sqrt{LC}$. Для ячеек метровой длины (l = 1 м) скорость получается равной

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{l}{\sqrt{LC}} = 2\cdot 10^8 \text{ м/с}$$

– в полтора раза меньше скорости света в вакууме. Видно, что при другой длине кусочка ответ получается таким же, лишь бы длина кусочка была малой.

Найдем теперь соотношение между приложенным к цепи напряжением и током, «втекающим» в цепь: при амплитуде приложенного напряжения U напряжение на первой катушке $U_L = U\varphi$, ток $I = U_L/X_L$, сопротивление цепи $Z = U/I = \omega L/\varphi = \sqrt{L/C} = 200$ Ом. Получилось «обычное» сопротивление – не индуктивное и не емкостное. Если кабель имеет конечную длину (так обычно и бывает), то на конце кабеля можно включить именно такой резистор (чаще встречаются кабели с «волновым» сопротивлением 75 или 50 Ом).

З.Волнов

Ф1757. *Стеклянная пластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (рис.1). Основание трапеции D, высота L (D? L), а угол между боковыми сторонами*

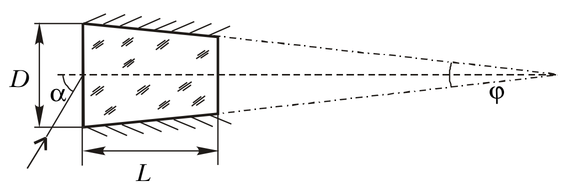


Рис.1

$\varphi ? \; 1$. *Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла n. При каких углах падения α луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?*

Луч света, попав в пластинку, несколько раз отразится от ее посеребренных боковых поверхностей, после чего попадет на малое основание пластинки. Луч пройдет через это основание только в том случае, если угол падения света на него не превысит угла полного внутреннего отражения, величина которого определяется законом преломления:

$$\sin\beta_{\max} = \frac{1}{n}.$$

Для того чтобы было проще рассматривать отражения от боковых поверхностей, воспользуемся приемом, который позволяет заменить распространение света с многократными отражениями на прямолинейное. Последовательно

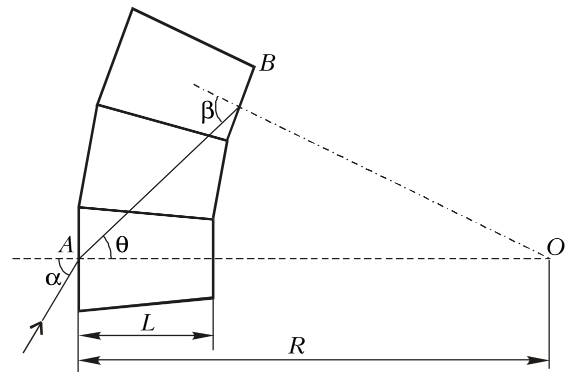


Рис.2

отразим несколько раз пластинку относительно ее боковой поверхности, на которой происходит очередное отражение света, и представим, что луч проходит эту боковую поверхность насквозь (рис.2). Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока луч не упрется в малое основание после очередного «отражения» пластинки. Фактически это выглядит так, как будто мы отражаем пластинку вместе с идущим в ней лучом. При этом величина угла падения света на малое основание после последнего «отражения» пластинки будет совпадать с величиной угла падения на основание реальной пластинки.

Теперь можно приступить к определению угла α. Применим к треугольнику ABO теорему синусов:

$$\frac{\sin\theta}{R-L} = \frac{\sin(\pi-\beta)}{R},$$

где

$$R = \frac{D}{2\sin(\varphi/2)}.$$

Отсюда получим

$$\sin\theta_{\max} = \left(1-\frac{L}{R}\right)\sin\beta_{\max} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{2L}{D}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Интересующий нас угол определяется из соотношения

$$\sin\alpha_{\max} = n\sin\theta_{\max},$$

откуда, с учетом малости угла φ, окончательно имеем

$$\sin\alpha_{\max} \approx \left(1-\frac{L\varphi}{D}\right).$$

Итак, луч света пройдет через пластинку при углах падения на ее основание

$$\alpha \le \alpha_{\max} \approx \arcsin\left(1-\frac{L\varphi}{D}\right).$$

Ю.Старокуров