## Конкурс «Математика 6—8»

*(см. «Квант» №4 за 2000 г.)*

**1.** Из рисунка 1 видно, что $\angle A_1LB_1 = 45°$, $\angle KLM = 45°$. Из рисунка также следует, что $\angle AKL = 45°$ и $\angle LMB = 45°$. (В силу симметрии задачи точки $B_1$, $L_2$, $A$, $L$, $B$, $L_1$, $A_1$ располагаются в вершинах правильного восьмиугольника.)

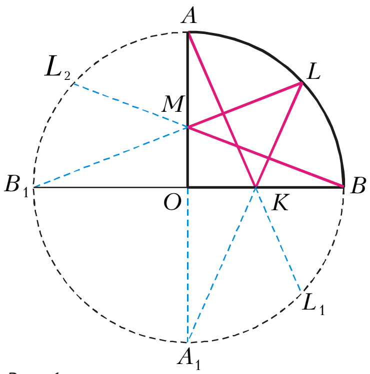

*Рис. 1*

**2.** Нельзя. Задача решается стандартным методом *инварианта*, а именно – поиском ответа на вопрос: что *не меняется* при указанной операции? Попробовав и то, и другое, в конечном счете можно заметить, что *сумма квадратов* всех чисел не изменяется. В самом деле:

$$\left(\frac{3A-4B}{5}\right)^2 + \left(\frac{4A+3B}{5}\right)^2 = A^2 + B^2.$$

Если в результате все числа (их количество равно 21) стали равны некоторому $X$, то, учитывая неизменность суммы квадратов, получаем

$$21X^2 = (-10)^2 + (-9)^2 + \ldots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + \ldots + 10^2 = 770,$$

откуда

$$X = \sqrt{\frac{770}{21}} = \sqrt{\frac{110}{3}}$$

– число иррациональное. В то же время ясно, что при указанных преобразованиях все числа остаются рациональными. Противоречие показывает, что добиться уравнивания всех чисел невозможно.

**3.** Верно. Пусть основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки $O$ на стороны четырехугольника $ABCD$, являются точки $M$, $N$, $K$ и $E$ (рис.2). Рассмотрим точку $O_1$ пересечения отрезков $MK$ и $NE$. Если $ABCD$ отличен от параллелограмма, то по неравенству треугольника следует, что сумма расстояний до сторон четырехугольника от точки $O$ больше, чем $MK + NE$. Значит, она больше, чем сумма расстояний до сторон от точки $O_1$. Получили противоречие с условием задачи. Если же четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, то сумма расстояний от любой точки внутри него до всех его сторон постоянна и равна $(a+b)\sin\alpha$, где $a$, $b$ – длины сторон параллелограмма, а $\alpha$ – один из его углов.

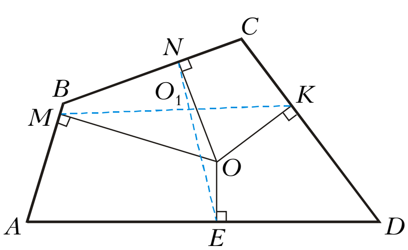

*Рис. 2*

**4.** Не может. Допустим противное: $n^2 + n + 1 = m^2$, где $m$ – целое. Но число $n^2 + n + 1$ заключено между двумя последовательными квадратами натуральных чисел: $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$, поэтому оно не может равняться квадрату целого числа.

**5.** Будем говорить, что каждый участок контролирует свой перекресток и все соседние с ним перекрестки. Пусть $n$ – наименьшее число участков, которые можно разместить в городе при заданных условиях, $v_1$, $v_2$, …, $v_n$ – перекрестки, на которых установлены участки, $d_i$ – число перекрестков, соседних с перекрестком $v_i$. Участки в сумме контролируют $D = (d_1+1) + (d_2+1) + \ldots + (d_n+1) \le 7n$ перекрестков, причем, возможно, в эту сумму некоторые перекрестки входят более одного раза. Так как каждый перекресток города контролируется, то $155 \le 7n$. Отсюда $n \ge 23$.

## Сколько мест в автобусе и другие задачи

**1.** Из условия, что у Асика и Басика вместе на 6 морковок больше, чем у Басика и Васика, следует, что у Асика на 6 морковок больше, чем у Васика. Если бы у Васика было не менее 2 морковок, то у Асика – не менее 8. Тогда бы Басику морковки не достались. Значит, у Васика была одна морковка, у Асика – семь, а у Басика – оставшиеся две.

**2.** Басик съел более 42 : 3 = 14 яблок, причем это количество кратно 3 (так как Асик съел в 3 раза меньше, чем Басик). Но если Басик съел более 15 яблок (а значит, не менее 18), то Асик съел не менее 6, а Васик – не более 42 – 18 – 6 = 18, т.е. не более Басика, а это противоречит условию. Значит, Басик съел 15 яблок, откуда нетрудно определить, что Асик съел 5 яблок, а Васик – 22 яблока.

**3.** Так как в каждой строке может стоять не более трех шашек, то всего шашек не более $3 \cdot 6 = 18$. Так как в каждом столбце стоит не менее двух шашек, то всего стоит не менее $2 \cdot 8 = 16$ шашек. Значит, на доске может быть расставлено 16, 17 или 18 шашек. Все три варианта возможны (рис.3).

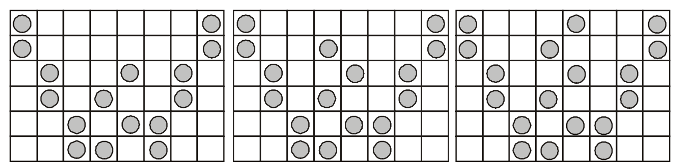
*Рис. 3*

**4.** Если на первой остановке вышли 5 человек, то за последующие 14 остановок автобус покинули 90 пассажиров. Пусть водитель открывал обе двери $k$ раз. Тогда на этих $k$ остановках вышли $11k$ человек, а на оставшихся $(14 - k)$ остановках – не менее $4(14-k)$ человек. Поэтому $11k + 4(14-k) \le 90$, откуда $k \ge 4$.

С другой стороны, на оставшихся $14 - k$ остановках вышли не более $5(14-k)$ пассажиров, значит, $11k + 5(14-k) \ge 90$, откуда $k \ge 4$.

Получили, что $k = 4$, т.е. обе двери открывали 4 раза.

**5.** Если бы у первого крольчонка было не менее двух наклеек, то у второго – не менее 3, …, у десятого – не менее 11, т.е. всего не менее 2 + 3 + … + 11 = 65, что невозможно. Значит, первому крольчонку досталась одна наклейка, второму – две наклейки, …, девятому – 9, а десятому – оставшиеся 19 наклеек.

**6.** Пусть мед заполняет $x$ пятидесятилитровых бутылей. Из первого условия следует, что объем меда более $40(x+4)$ литров, из второго – что он более $70(x-5)$ литров. Тогда имеют место неравенства

$$50x > 40(x+4) \text{ и } 50x > 70(x-5).$$

Из первого неравенства следует, что $x > 16$, из второго – что $x < 17{,}5$, т.е. $x = 17$. Отсюда общий объем меда – 850 литров.

**7.** Наибольшее натуральное число, квадрат которого записывается тремя цифрами, это 31. Значит, число Совы не более 26. Наименьшее натуральное число, куб которого имеет 5 цифр, это 22. Значит, число Совы не менее 26. Таким образом, число Совы равно 26.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

**1.** Для удержания щетки или палки нужно при их отклонении успевать двигать пальцем так, чтобы они вновь оказывались в положении равновесия. Щетка будет отклоняться медленнее, чем палка той же длины, так как центр тяжести щетки лежит выше центра тяжести палки.
**2.** В равновесии масса груза $C$ в два раза больше массы груза $B$. При смещении точки $A$ вправо равновесие нарушится – груз $C$ будет опускаться, а груз $B$ – подниматься.
**3.** Равновесие шарика устойчиво к малым возмущениям и неустойчиво к большим.
**4.** Если $h \ge l_0$, в точке $O$ – устойчивое положение равновесия (ему соответствует минимум потенциальной энергии пружины). Если $h < l_0$, в точке $O$ – неустойчивое положение равновесия (максимум потенциальной энергии пружины), но слева и справа на равных расстояниях от точки $O$ имеются два устойчивых положения равновесия, соответствующих недеформированному состоянию пружины.
**5.** Хвост обеспечивает устойчивость змея относительно вращений около вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести.
**6.** При малейшем отклонении доски от вертикали момент выталкивающей силы относительно центра тяжести доски увеличивает отклонение доски, и она опрокидывается в устойчивое горизонтальное положение.
**7.** Да. Это достигается выбором формы сечения корабля, когда центр давлений смещается в сторону крена.
**8.** Шарообразная форма пузырьков отвечает минимуму энергии поверхностного натяжения жидкости.
**9.** Энергия поверхностного натяжения жидкого цилиндра больше, чем энергия капель, которые могут из него образоваться.
**10.** Поверхность одной большой капли меньше, чем суммарная поверхность нескольких маленьких капель с той же общей массой. Значит, и энергия поверхностного натяжения у большой капли меньше.
**11.** Система пар – жидкость находится в термодинамическом равновесии, т.е. температуры отдельных ее частей равны.
**12.** Да. Причем при движении вдоль прямой $x$, если $qQ < 0$, равновесие в точке $O$ неустойчивое, если $qQ > 0$, равновесие устойчивое. При движении вдоль прямой $y$ условия меняются местами.
**13.** Радиоактивные ядра нестабильны по своей природе и «обречены» на гибель уже в момент своего рождения.
**14.** Нет. Например при $\gamma$-распаде заряд ядра не меняется, поэтому не меняются и химические свойства вещества.

### Микроопыт

После прокалывания пленки в петле оставшаяся часть мыльной пленки будет стремиться уменьшить свою поверхность, иначе говоря, дырка должна образовать фигуру максимальной площади. Такой фигурой будет круг.

## Законы сохранения в задачах на столкновения

**1.** $\beta > M/(M - m_p) = 7/6$, где $M$ – масса ядра лития, а $m_p$ – масса протона.
**2.** $E_{\text{пор}} = 3E_{\text{и}}/4 = 10{,}2$ эВ. **3.** $\Delta\lambda = h/(mc) = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м.

## Московский государственный университет

## МАТЕМАТИКА

### Вариант 1

**1.** $(3;\,4)\cup(4;\,7)$. *Указание.* Умножим левую и правую части на положительное при всех $x$ выражение $\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$. После упрощений получим равносильную систему

$$2|x-4| < |x-1|,\ x \ne 5/2,\ x \ne 4,$$

решаемую стандартным образом.

**2.** $-\dfrac{3}{14}\sqrt[4]{51}$. *Указание.* Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_7$ – убывающая арифметическая прогрессия, $d < 0$ – ее разность, причем

$$a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_7^5 = 0.$$

Докажите, что $a_4 = 0$, $a_5 = -a_3 = d$, $a_6 = -a_2 = 2d$, $a_7 = -a_1 = 3d$.
**3.** $-23\pi/6$, $-19\pi/6$, $-11\pi/6$, $-4\arccos(-9/10)$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\right) = 0.$$

**4.** 20. Из условия задачи получаем (рис.4) $S_{CKL} : S_{DKL} = CL : LD = 1 : 5$. Поскольку $S_{BKLC} : S_{AKLD} = 1 : 5$, то

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AKD}} = \frac{S_{BKLC} - S_{CKL}}{S_{AKLD} - S_{DKL}} = \frac{1}{5}.$$

В треугольниках $BKC$ и $AKD$ высоты, опущенные из вершины $K$, равны. Поэтому $BC : AD = 1 : 5$. Из точек $C$ и $D$ опустим перпендикуляры $CC'$ и $DD'$ на прямую $AB$. Из подобия треугольников $BCC'$ и $ADD'$ имеем

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{5}.$$

С другой стороны, по теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла

$$\frac{C'K}{D'K} = \frac{CL}{LD} = \frac{1}{5}.$$

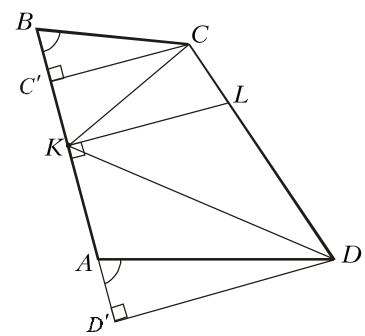

Рис. 4

Отсюда прямоугольные треугольники $CC'K$ и $DD'K$ подобны с коэффициентом $\dfrac{1}{5}$, и $DK = 5\,CK = 5 \cdot 4 = 20$.

**5.** 1, $\dfrac{5}{2}$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно совокупности из двух уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a + \frac{8}{5}, & (1)\\[2mm] \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} - 2. & (2) \end{array}\right.$$

Если число $x_0$ является решением уравнения (1), то число $a - x_0$ также является решением этого уравнения. Если оба решения – целые, то и $a$ должно быть целым. С другой стороны, корни уравнения (2) тоже парные: $x_1$ и $a - \dfrac{1}{2} - x_1$, и их целочисленность приводит к условию $a - \dfrac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, требование задачи равносильно совокупности следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \text{все корни уравнения (1) – целые,}\\ a \in \boldsymbol{Z},\\ \text{уравнение (2) не имеет решений;} \end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} \text{все корни уравнения (2) – целые,}\\ a - \frac{1}{2} \in \boldsymbol{Z},\\ \text{уравнение (1) не имеет решений.} \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Поскольку при $A > 0$ и $t > 0$ выполняется неравенство
$$t+\frac{A}{t}\ge 2\sqrt{A},$$
условия разрешимости уравнений (1) и (2) имеют, соответственно, вид
$$\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{a}+\frac{8}{5}\ge 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{a}{2}};$$
$$4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5}-2\ge 2\left(\frac{3}{2}\right)^{a-\frac{5}{2}}.$$
Решая эти неравенства и учитывая, что корни второго уравнения должны быть положительны, получаем условия

1) $a\le 2\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}$; $a\ge 2\log_{\frac{3}{2}}2$;

2) $a\ge\frac{5}{2}$.

Рассмотрим первую систему из совокупности (3). Из условий 1) и 2) находим «подозрительные» значения $a$ – это $a\in\mathbf{Z}$, $a\le 0$ и $a = 1$. Для $a = 1$ условия задачи выполняются, для $a\le 0$ – нет (докажите это, сравнивая левую и правую части уравнения (1) при целых $x$ и $a - x$). Второй системе из совокупности (3) удовлетворяет лишь $a=\frac{5}{2}$.

**6.** 2. *Указание.* Пусть $\alpha$ – плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная хорде $PP_1$. Эта плоскость делит пополам хорду $PP_1$, а также параллельные ей хорды $QQ_1$, $RR_1$ и $SS_1$. Следовательно, $P_1Q_1R_1S_1$ – квадрат со стороной $25/4$, симметричный квадрату $PQRS$ относительно плоскости $\alpha$.

Пусть $SS_1 = 2x$, т.е. $x$ – расстояние от точки $S$ до плоскости $\alpha$. Спроектируем все точки на координатную прямую $l$, перпендикулярную $\alpha$. Пусть сама плоскость $\alpha$ проектируется в начало координат на $l$, а направление на оси $l$ выбрано так, что координата $\pi(Q)$ проекции точки $Q$ равна 5. Тогда $\pi(Q_1) = -5$, $\pi(P) = -\pi(P_1) = \pm1$, $\pi(R) = -\pi(R_1) = \pm3$, $\pi(S) = -\pi(S_1) = \pm x$. Координату проекции точки $A$ – центра квадрата $PQRS$ – можно вычислить двумя способами:
$$\pi(A)=\frac{\pi(P)+\pi(R)}{2}=\frac{\pi(Q)+\pi(S)}{2}\Leftrightarrow\frac{\pm1\pm3}{2}=\frac{5+\pi(S)}{2}.$$
Таким образом, возможны четыре случая:

| | $\pi(P)$ | $\pi(Q)$ | $\pi(R)$ | $\pi(S)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 5 | 3 | −1 |
| 2. | 1 | 5 | −3 | −7 |
| 3. | −1 | 5 | −3 | −9 |
| 4. | −1 | 5 | 3 | −3. |

Покажем, что случаи 2, 3 и 4 невозможны. Например, в случае 2 отрезки $SQ$ и $S_1Q_1$ длины $25/4$ оказываются диагоналями трапеции $S_1QQ_1S$ (рис.5). Но
$$QS+Q_1S_1=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}<14=SS_1,$$
что невозможно. Аналогично докажите невозможность случая 3. В случае 4 рассмотрите параллелограмм $KLMN$, образованный серединами отрезков $PP_1$, $QQ_1$, $RR_1$ и $SS_1$ соответственно, вычислите его стороны и диагональ $KM$ и докажите, что $KM > KL + LM$, что противоречит неравенству треугольника.

В оставшемся случае 1 получаем $SS_1 = 2|\pi(S)| = 2$.

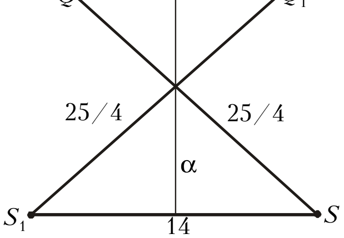

Рис. 5

## Вариант 2

**1.** $\left[0;\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right)\cup\left(\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3};1\right]$. **2.** $(5/8;4)$.

**3.** а) 6; б) 192.

а) Первый автобус появляется в пункте $B$ в моменты времени
$$t_n=\frac{2}{51}+\frac{4}{51}\cdot n,$$
где $n\in\mathbf{Z}$, причем $t_n\le 8$, откуда $n\le 101$. Второй автобус появляется в пункте $B$ в моменты времени $s_k=\frac{4}{42}\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$. Встреча автобусов в пункте $B$ означает равенство $t_n = s_k$, т.е. $\frac{2}{51}+\frac{4}{51}n=\frac{4}{42}k$, или $7(1+2n)=17k$. Последнее равенство выполняется только тогда, когда нечетное число $1 + 2n$ делится на 17, т.е. $1 + 2n = 17, 51, 85, 119, 153, 187, 221, \ldots$ Поскольку $0\le n\le 101$, должно быть $1\le 1+2n\le 203$, так что подходят только первые шесть чисел, причем для всех них $k=7\cdot\frac{1+2n}{17}$ – целое. Таким образом, в пункте $B$ было 6 встреч.

б) При каждом прохождении отрезка $AB$ первый автобус ровно 1 раз оказывается в одной точке $X\in AB$ со вторым автобусом: либо в момент встречи, либо в момент обгона, причем в случае $X = A$ или $X = B$ в точке $X$ происходят и встреча, и обгон одновременно. Поэтому число совпадений положений автобусов строго между пунктами $A$ и $B$ равно числу прохождений первым автобусом отрезка $AB$ ($\frac{51}{2}\cdot 8 = 204$ раза) минус удвоенное суммарное число встреч в точках $A$ и $B$. Число встреч в пункте $B$ равно 6 (см. п.а)). В пункте $A$ первый автобус появляется в моменты времени $\frac{4}{51}\cdot n$, $n\in\mathbf{Z}$, а второй автобус – в моменты времени $\frac{2}{42}+\frac{4}{42}\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$, причем встреча в пункте $A$ означает равенство $28n = 17(1+2k)$, что невозможно.

**4.** $CE = 6$, $OA = 2$. Проведем общую касательную $FG$ к окружностям в точке $A$ (рис.6). Углы $\angle DBA$ и $\angle FAB$ равны как опирающиеся на одну дугу, $\angle FAB = \angle CAG$, углы $\angle CAG$ и $\angle CEA$ равны как опирающиеся на одну дугу. Таким образом, треугольники $CBE$ и $CEA$ подобны по двум углам, откуда
$$\frac{BC}{CE}=\frac{CE}{AC}\Rightarrow CE=\sqrt{BC\cdot AC}=\sqrt{9\cdot4}=6.$$
Далее, $\angle BAD = 180^\circ - \angle DAC = \angle CEB = \angle CAE$ (последнее равенство следует из доказанного выше подобия треугольников $CBE$ и $CEA$), так что луч $AB$ является биссектрисой угла между лучом $AD$ и продолжением луча $EA$ за точку $A$. Следовательно, центр $O$ окружности, о которой идет речь во втором вопросе задачи, лежит на отрезке $AB$. Поскольку $O$ лежит и на биссектрисе угла $\angle BDA$, по свойству биссектрисы и из подобия $\Delta BDA\backsim\Delta BCE$

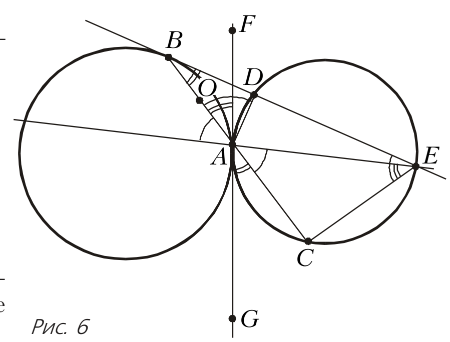

Рис. 6

$$\frac{OB}{OA}=\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{CE}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Отсюда

$$OA = \frac{2}{5}AB = 2.$$

**5.** $[0;1)\cup(1;2]\cup\{3\}$. *Указание.* Пусть $A = |a| - 1$, $B = 1 - |a-2|$. Запишем уравнение в виде

$$A\cos 2x + B\sin 2x = -B\cos x + A\sin x.$$

Если $a = 1$, то $A = B = 0$, и все $x \in (-\pi;\pi)$ являются решениями. Если $a \neq 1$, то $A^2 + B^2 > 0$, и уравнение можно записать так:

$$\cos(2x - \varphi) = \cos\left(x - \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

где

$$\begin{cases} \cos\varphi = A\Big/\sqrt{A^2+B^2}, \\ \sin\varphi = B\Big/\sqrt{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Исходное уравнение, тем самым, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{2\varphi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Первая строка этой совокупности дает одну фиксированную точку на тригонометрической окружности, а вторая строка – три зависящие от $\varphi$ точки, дуги между которыми все равны по 120°. Число всех решений на дуге $(-\pi;\pi)$ будет нечетным только в тех случаях, когда одна из этих трех точек совпадает либо с $\pi$ (или, что то же, с $-\pi$), либо с $-\dfrac{\pi}{2}$. Но тогда либо $A = B \neq 0$, либо $B = 0 \neq A$.

**6.** $\sqrt{38}$. *Указание.* Докажите, что суммы квадратов площадей противоположных граней пирамиды равны. Для этого введите прямоугольную систему координат: точка $O$ пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ – начало системы координат, ось $Oz$ направим по лучу $OS$, ось $Ox$ – перпендикулярно $Oz$ в плоскости $ASC$, ось $Oy$ – перпендикулярно $Oz$ в плоскости $BSD$ (рис.7). Вершины пирамиды получат следующие координаты: $S(0;0;h)$,

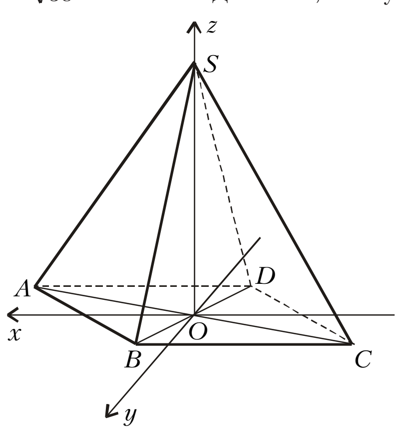

Рис. 7

$A(a;0;c)$, $C(-a;0;-c)$, $B(0;b;d)$, $D(0;-b;-d)$, так как точка $A$ симметрична точке $C$, а точка $B$ – точке $D$ относительно начала координат $O$.

Найдите длины ребер пирамиды, а затем по формуле Герона вычислите площади граней $ASB$, $ASD$, $BSC$ и $CSD$ и убедитесь в том, что

$$S^2_{ASB} + S^2_{DSC} = S^2_{ASD} + S^2_{BSC}.$$

## Вариант 3

**1.** $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. **2.** $\{0;\log_3 2\}$.

**3.** $\left[2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{65}}{16};\dfrac{\pi}{3}\right)$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0, \\ 6 - 10\cos x - \sin x \geq 0, \\ 2\cos x > 1, \end{cases}$$

которая с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ превращается в систему квадратичных неравенств.

**4.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Пусть $O$ – точка пересечения $MN$ и $CD$ (рис.8), $\alpha = \angle ACD$, $\beta = \angle DCB$, $MC = x$, $NC = y$. Тогда, поскольку $\alpha + \beta = 120^\circ$ и $3\sin\alpha = 4\sin\beta$, получим

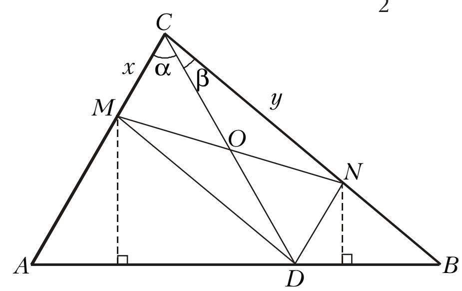

Рис. 8

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3},\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}},\ \sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Выражая двумя способами площадь треугольника $MCN$, имеем после упрощений

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 4x + 3y = 24, \end{cases} \quad \text{т.е. } x = 3,\ y = 4.$$

Далее, вычислив $S_{MCO}$, получим

$$S_{\Delta MCO} = \frac{1}{2}\cdot S_{\Delta MCN},$$

откуда $S_{\Delta MCO} = S_{\Delta CON}$, следовательно, $MO = ON$, значит, $MCND$ – параллелограмм. Таким образом, $AC \parallel DN$, $MD \parallel BC$, поэтому треугольник $AMD$ подобен треугольнику $DNB$, причем из условия задачи следует, что коэффициент подобия равен 2. Поэтому $AM = 2DN = 2CM = 6$, $NB = \dfrac{MD}{2} = \dfrac{CN}{2} = 2$, $AC = 9$, $BC = 6$ и $S_{\Delta ABC} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

**5.** $\begin{cases} x = \dfrac{a-3}{4}, \\ y = \log_2\left(15a^2 - 26a + 7\right) - 2 \end{cases}$ при $a \in \left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{5};+\infty\right)$;

$\begin{cases} x = -\dfrac{a+1}{2}, \\ y = 1 + \log_2\left(4a - 3a^2 - 1\right) \end{cases}$ при $a \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$;

$\begin{cases} x = 1 - a, \\ y = 1 + \log_2\left(12a - 5a^2 - 7\right) \end{cases}$ при $a \in \left(1;\dfrac{7}{5}\right)$;

$\begin{cases} x = b, \text{ где } b \in (-\infty;-1)\cup(0;+\infty), \\ y = \log_2\left(4b^2 + (14a-10)b + 8a - 8\right) \end{cases}$ при $a = 1$;

нет решений при $a = \dfrac{1}{3};\ \dfrac{7}{5}$. *Указание.* После замены

$$u = \log_2\left(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8\right),$$

$$v = \log_2\left|4x^2 + (6-2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right|$$

исходная система переписывается в виде

$$\begin{cases} y^2 - 3yu + 2v^2 = 0, \\ 5y^2 - 8yv + 3u^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $y = u = v = 0$ – ее решение. При $y \neq 0$ введем переменные $p = \dfrac{u}{y}$, $q = \dfrac{v}{y}$. Тогда

$$\begin{cases} 2q^2 - 3p + 1 = 0, \\ 3p^2 - 8q + 5 = 0, \end{cases}$$

откуда $p = q = 1$.
Итак, $y = u = v$ (в частности, последнему соотношению удовлетворяет найденное выше нулевое решение $y = u = v = 0$).
Таким образом, задача сводится к решению при всех значениях параметра $a$ уравнения

$$\log_2\left(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8\right) = \\ = \log_2\left|4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right|,$$

равносильного системе

$$\begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = \left|2x^2 + (3 - a)x + 2a^2 - 4a + 2\right|, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть 2 случая:

$$1)\ \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = 2x^2 + (3 - a)x + 2a - 4a + 2, \end{cases}$$

и

$$2)\ \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = -2x^2 - (3 - a)x - 2a^2 + 4a - 2. \end{cases}$$

**6.** $50\left(5\sqrt{2} \pm 4\right)$. *Указание.* Из точки $O$ каждая из сторон треугольника $ABC$ видна под прямым углом, т.е. точка $O$ – вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а треугольник $ABC$ получается сечением этого угла некоторой плоскостью.
Треугольник $ABC$ – остроугольный. Найдем сторону $AC$. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$. По теореме синусов

$$\frac{20}{\sin\alpha} = \frac{15\sqrt{2}}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = 10\sqrt{5}.$$

Отсюда $AC = 5\sqrt{10}$, а $S_{\Delta ABC} = 150$.
Пусть $OK$ – перпендикуляр, опущенный из $O$ на плоскость $ABC$, $h$ – его длина, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 450, \\ y^2 + z^2 = 400, \\ x^2 + z^2 = 250. \end{cases}$$

находим, что $x^2y^2z^2 = 150 \cdot 300 \cdot 100$, а из формулы для объема пирамиды $OABC$ находим $h = 5\sqrt{2}$.
Далее, трехгранный угол, образованный лучами $OA$, $OB$, $OC$, высекает из четвертой сферы с радиусом $r$ и центром $O$ одну восьмую ее часть. Тогда

$$\frac{4\pi r^2}{8} = 8\pi, \text{ т.е. } r = 4.$$

Так как вершина $S$ пирамиды искомого объема является точкой касания четвертой сферы с плоскостью, параллельной $ABC$, то для высоты $H$ пирамиды $SABC$ имеем либо $H = h + r$, либо $H = h - r$. Окончательно, $V_{SABC} = 50\left(5\sqrt{2} \pm 4\right)$.

### Вариант 4

**1.** $\left[-\dfrac{\pi}{4}; +\infty\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left[-\dfrac{\pi}{4} - \pi n; \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right]\right)$. **2.** 90%.

**3.** $\left(-5; -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup [-4; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. *Указание.* Исходное неравенство переписывается в виде

$$\log_{(x+5)(1-x)}\left((x + 5)(1 - 2x)\right) \le \log_{1-x}(1 - 2x).$$

**4.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{12 \pm 3\sqrt{3}}\right)$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \gamma$ (рис.9). Пусть $X$ и $Y$ – точки пересечения прямых $KL$ и $KM$ с прямыми $AB$ и $AC$ соответственно. Возможны различные случаи расположения точек $X$ и $Y$ на прямых $AB$ и $AC$ (одна из таких конфигураций изображена пунктиром на рисунке 9). Однако при этом возможны только два варианта значений величины $\angle XAY$, а именно: $\angle XAY = \gamma$ или $\angle XAY = \pi - \gamma$. Пусть $\angle KXA = \alpha$ и $\angle KYA = \beta$. Пусть точка $Z$ – проекция точки $K$ на прямую $XY$. По теореме о трех перпендикулярах $AZ \perp XY$, значит, $\angle KZA = \varphi$ – искомый. Пусть $KA = a$, тогда $AX = a\operatorname{ctg}\alpha$, $AY = a\operatorname{ctg}\beta$,

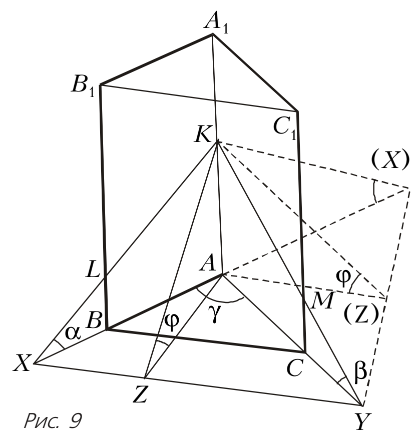

Рис. 9

$$2S_{\Delta AXY} = a^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \sin\gamma.$$

По теореме косинусов

$$XY^2 = a^2\left(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta \pm 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \cos\gamma\right).$$

Следовательно,

$$AZ = \frac{2S_{\Delta AXY}}{XY}.$$

Из треугольника $KAZ$ получаем выражение для $\operatorname{tg}\varphi$ через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta \pm 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \cos\gamma}}{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \sin\gamma}.$$

Осталось подставить $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ и $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

**5.** 30. Положим $z = 4x^2 + 80x + y + 43$. Нахождение максимума $z$ при заданных условиях эквивалентно определению максимального из значений $z$, при которых существует решение системы

$$\begin{cases} 4x^2 + 80x + y + 43 = z, \\ x^2 + 86x + y \ge -202, \\ 6x^2 + 32x + y \le -283. \end{cases}$$

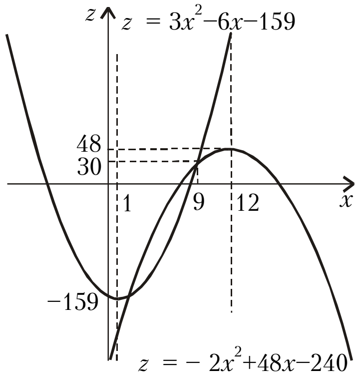


Рис. 10

Исключая $y$ из уравнения и подставляя в неравенства, имеем

$$\begin{cases} z \ge 3x^2 - 6x - 159, \\ z \le -2x^2 + 48x - 240. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация на плоскости $(x, z)$ дает фигуру между двумя параболами (рис.10). Точки пересечения этих парабол:

$$x_1 = \frac{9}{5};\ x_2 = 9.$$

Так как вершина параболы $z = -2x^2 + 48x - 240$ лежит правее отрезка $\left[\frac{9}{5}; 9\right]$, то максимальное значение $z$ достигается в точке $x = 9$. Оно равно 30.

**6.** 2. Пусть $R_1$ и $R_2$ – радиусы, а $O_1$ и $O_2$ – центры окружностей, проходящих через пары точек $A$, $C$ и $B$, $D$ соответственно (см. рис. 11 и рис. 12), $O_1O_2 = \rho$ – расстояние между центрами окружностей, $EF$ – их общая хорда, пересекающая прямую $O_1O_2$ в точке $G$. Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма, а точка $H$ – проекция $O$ на прямую $O_1O_2$. Пусть $\Delta$ – расстояние от точки $O$ до прямой $EF$, $O_1O = r_1$, $O_2O = r_2$. Пусть $d_{\max} = \max\{AC, BD\}$, $d_{\min} = \min\{AC, BD\}$, $AC = = 2p$ и $BC = 2q$. Из свойств хорд получаем, что $AO \cdot OC = p^2 = R_1^2 - r_1^2$, аналогично, $BO \cdot OD = q^2 = R_2^2 - r_2^2$. Пусть $O_1G = \rho_1$, $O_2G = \rho_2$. Очевидно, что $HG = \Delta$. Из прямоугольных треугольников $O_1GE$ и $O_2GE$ имеем $GE^2 = R_1^2 - \rho_1^2 = R_2^2 - \rho_2^2$, т.е. $R_2^2 - R_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2$, или $r_2^2 - r_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2$. Аналогично, из прямоугольных треугольников $O_1OH$ и $O_2OH$ получаем равенство $r_2^2 - r_1^2 = \left(\rho_2 - s_2\Delta\right)^2 - \left(\rho_1 - s_1\Delta\right)^2$, где $s_1$ равно 1 или −1, если точки $O$ и $O_1$ лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от прямой $EG$, аналогично, $s_2$ равно 1 или −1, если точки $O$ и $O_2$ лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от этой же прямой. Отсюда получим $\rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2 = \left(\rho_2 - s_2\Delta\right)^2 - \left(\rho_1 - s_1\Delta\right)^2$, а после приведения подобных членов $2\Delta\left(s_1\rho_1 - s_2\rho_2\right) = p^2 - q^2$. Понятно, что $\left|s_1\rho_1 - s_2\rho_2\right|$ – это расстояние между центрами окружностей. Получаем соотношение $8\rho\Delta = d_{\max}^2 - d_{\min}^2$. В нашей задаче $d_{\max} = 6$, $d_{\min} = 2$, $\Delta = 2$. Поэтому $\rho = 2$.

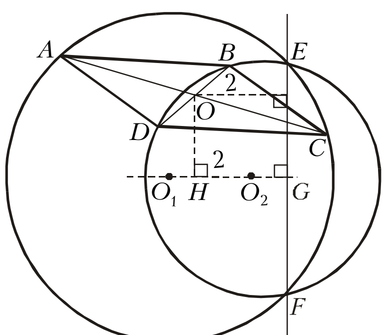


Рис. 11

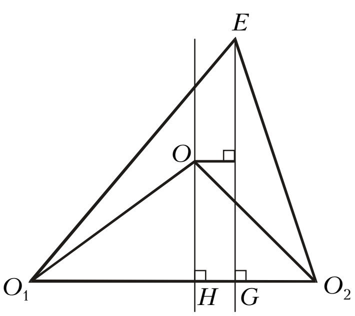


Рис. 12

### Вариант 5

**1.** $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\log_3^2 5$.

**3.** $\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)/4; +\infty\right)$. **4.** $\arccos\frac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

**5.** $(1; 5)$. **6.** $7/2$. **7.** $(0; 1/4) \cup (4; +\infty)$.

**8.** 4 : 3. *Указание.* Пусть $O$ – центр окружности, $K$ – точка пересечения $AO$ и $MN$, $H$ – середина $BC$. Из подобия треугольников $AMK$ и $AOM$, $APK$ и $AOH$ и соотношения $AM^2 = AB \cdot AC$ получите, что $AP \cdot AH = AB \cdot AC$. Дальнейшее ясно.

### Вариант 6

**1.** $\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\left(-1 + \sqrt{57}\right)/4$.

**3.** $\left(1 - \sqrt{2}; 2/3\right) \cup \left(1; 1 + \sqrt{2}\right)$. **4.** 102%.

**5.** $\left[1; \log_3 6\right]$. **6.** $\left(b^2 - a^2\right)/b$.

**7.** $\left[1/2; 1\right]$. *Указание.* Данное неравенство имеет единственное решение $(x = 1)$ тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена $x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a$ не меньше 1.

**8.** $\sqrt{53}$. *Указание.* Пусть $S$ – вершина конуса, $SD$ – образующая конуса, содержащая точку $C$, $E$ – точка пересечения прямой $SA$ с плоскостью основания конуса (рис.13). Проведем через точку $A$ плоскость, перпендикулярную плоскости основания конуса. Имеем $OD \perp ED$, а точка $B$ – точка пересечения прямых $AC$ и $ED$ в плоскости $SED$. Пользуясь условием и подобием треугольников, убедитесь, что $AD_1 = BD$. Найдите длины отрезков $SD$ и $BD$, а затем и $SB$ по теореме Пифагора.

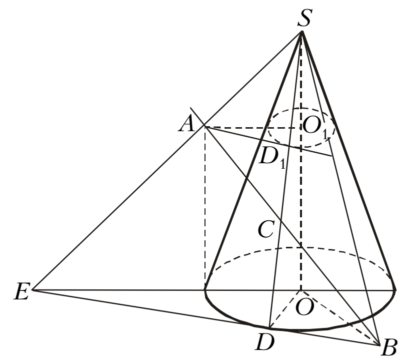


Рис. 13

### Вариант 7

**1.** 1. **2.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 11.

**4.** $12\pi$. *Указание.* Пусть $r_n$ – радиус $n$-й окружности. Докажите, что $r_n$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = (1 + \sin\alpha)/(1 - \sin\alpha)$, где $\alpha$ – половина данного угла. Из условия получите, что $\pi q^6 = 64\pi$, т.е. $q = 2$.

**5.** $\frac{1}{3}$. *Указание.* Пусть $k = DC_1/DC$, $S = S_{ADB} = S_{ADC} = S_{BDC}$. Выразите через $S$ и $k$ отношение боковых поверхностей пирамид $DA_1B_1C_1$ и $DABC$ и получите, что $k = 1$, т.е. точки $C_1$ и $C$ совпадают. Отношение же объемов пирамид $DCA_1B_1$ и $DCAB$ равно отношению площадей треугольников $DA_1B_1$ и $DAB$.

**6.** $\pm 1$. *Указание.* С помощью замены $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x$ приводим уравнение к виду

$$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Поделив $(y \ne 0)$ уравнение на $y^2$ и выполнив замену $t = y + \frac{1}{y}$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

## *Вариант 8*

**1.** $(-\infty;\,-2)\cup[-1;\,+\infty)$.  **2.** $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

**3.** $3\sqrt{15}/4$.  **4.** $\left(-6;\,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\,2\right)\cup\left(2;\,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2};\,10\right)$.

*Указание.* Преобразуйте неравенство с помощью замены $y = \log_2|x-2|$.

**5.** $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}$. Пусть радиусы первых трех шаров с центрами $O_1$, $O_2$, $O_3$ равны $R$. Рассмотрим сечение призмы плоскостью $O_1O_2O_3$ (рис.14). Сторона основания призмы равна

$$a = 2R\left(1+\sqrt{3}\right),$$

т.е. $R = \dfrac{a}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$,

$$O_1A = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

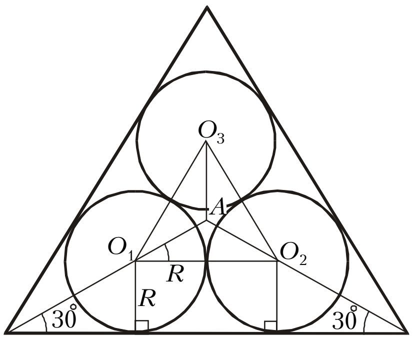


*Рис. 14*

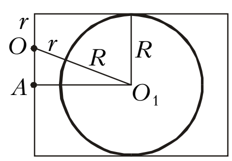


*Рис. 15*

Радиус $r$ четвертого шара с центром $O$ находим из прямоугольного треугольника $OAO_1$ (рис.15):

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2, \text{ откуда } r = \frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}.$$

## *Вариант 9*

**1.** $(-\infty;\,1]\cup(3/2;\,+\infty)$.  **2.** 1; 2.  **3.** $24/7$.

**4.** $(0;\,1)\cup(3;\,5)$.

**5.** $\pm\sqrt{8-\left(\dfrac{(-1)^n}{6}+n\right)^2}$, где $n = 0,\ 1,\ 2$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно такому:

$$\pi\sqrt{8-x^2} = (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

где $n = 0,\ 1,\ 2$. Это следует из неотрицательности левой части и из того, что

$$\pi\sqrt{8-x^2} \le 2\sqrt{2}\pi < \left(2+\frac{5}{6}\right)\pi.$$

(Последняя оценка следует из того, что $12\sqrt{2} < 17$.)

**6.** $1+\sqrt{3}$. *Указание.* Найдите углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ нового треугольника, квадрат радиуса описанной окружности, а затем воспользуйтесь формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

**7.** $5/2$. *Указание.* При $x = -1/2$ левая часть уравнения равна $5/2$ независимо от значения $b$, так что $a = \dfrac{5}{2}$ удовлетворяет условию. Если $a < \dfrac{5}{2}$, то при $b = \dfrac{1}{2}$ получаем

$$|x-2| + \frac{1}{2}|2x+1| \ge \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

а при $a > \dfrac{5}{2}$ и $b = -\dfrac{1}{2}$ имеем

$$|x-2| - \frac{1}{2}|2x+1| \le \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

так что $a = 5/2$ – единственное возможное значение $a$.

## *Вариант 10*

**1.** $\left(\dfrac{4}{5};\,4\right]$.  **2.** $\dfrac{120}{119}$.  **3.** $1\dfrac{1}{5}$ часа.  **4.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$.

**5.** $\{(10;\,15);\,(15;\,10)\}$.  **6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$.

**7.** $\left\{0;\,1;\,\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(3\sqrt{1-x^2}-1\right)\left((x-1)^2-\sqrt{1-x^2}\right) = 0.$$

**8.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2-ab+b^2}-\dfrac{a}{4}$; $\dfrac{b}{a}\in\left(1;\,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. Пусть $r$ – радиус любого из восьми одинаковых шаров, при этом $a = 4r$, $b > a$. Центры шаров – вершины параллелепипеда с ребрами $2r$; $2r$; $b-2r$. Центр девятого шара (радиуса $R$) находится в центре этого параллелепипеда, поэтому

$$R + r = \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2+(2r)^2+(b-2r)^2},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4}.$$

Используя ограничение задачи $R \le \dfrac{a}{4}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4} \le \frac{a}{4},$$

из которого находим, что

$$1 < \frac{b}{a} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

## *Вариант 11*

**1.** $\left(19+\sqrt{137}\right)/8$. *Указание.* Выполните замену $y = \sqrt{3x+2}$.

**2.** $-25$; 3.  **3.** $\dfrac{180^\circ}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\pi}$.

**4.** $\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$. *Указание.* Условие означает, что $x \ge 2$. Функция $g_1(x) = \sqrt{1+3x-x^2}$ определена на отрезке $\left[\left(3-\sqrt{13}\right)/2;\,\left(3+\sqrt{13}\right)/2\right]$, причем на отрезке $J = \left[2;\,\left(3+\sqrt{13}\right)/2\right]$ она убывает. Следовательно, область ее значений – отрезок $\left[0;\,\sqrt{3}\right]$. Функция $g_2(x) = 2 - g_1(x)$ возрастает, и ее область значений – отрезок $\left[2-\sqrt{3};\,2\right]$, а функция $g_3(x) = \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} g_2(x)$ определена и убывает на отрезке $J$. Ее область значений – отрезок $\left[\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}2;\,\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$. Последний отрезок целиком содержится в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ –

докажите это! Следовательно, наибольшее значение $\operatorname{tg} g_3(x)$ равно

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)\right).$$

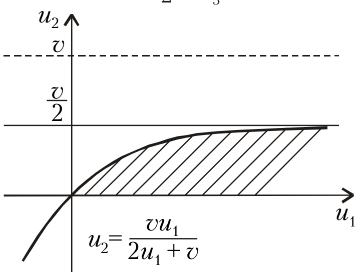


Рис. 16

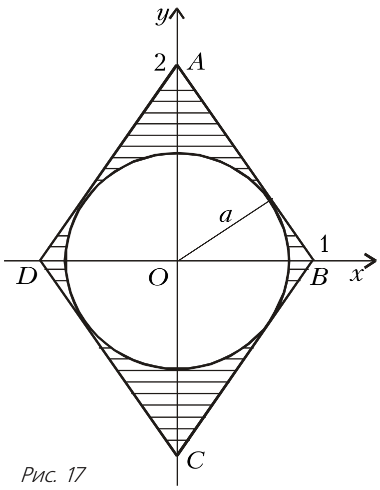


Рис. 17

**5.** См. рис.16.

**6.** а) $2/\sqrt{5}$; б) $4(5-\pi)/5$. *Указание.* Первое уравнение задает на плоскости $xOy$ ромб, а второе – окружность с радиусом $a$ и центром в начале координат (рис.17). Условию а) отвечает значение параметра $a$, при котором окружность является вписанной в ромб.

б) На рисунке заштрихованы точки, удовлетворяющие данному неравенству.

### Вариант 12

**1.** 10 л и 20 л.

**2.** 11.

**3.** $(0;1)\cup\{2\}\cup(4;+\infty)$.

**4.** $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$,

$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

**5.** $-3/4$; 0; $2/9$.

**6.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 1 | = | 8 |
| – | | × | | : |
| 1 | + | 3 | = | 4 |
| ‖ | | ‖ | | ‖ |
| 6 | : | 3 | = | 2 |

### Вариант 13

**1.** $\{0\}$. **2.** 4. **3.** $[-8;-6)\cup\left(3;\sqrt{10}\right)$.

**4.** 120°, 30°, 30°.

**5.** $\frac{\pi}{12}+2\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+2\pi l$, $l\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из условия следует, что

$$\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Осталось найти решения этого уравнения и выбрать те из них, при которых возрастают соответствующие показатели степени.

**6.** $16-\frac{13}{9}\pi$. *Указание.* Докажите, что шар касается сторон основания пирамиды.

**7.** $\left[3\sqrt{2};6\right]$. Обозначив через $g(x)=\cos\left(2f(x)\right)$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{g(x)}-6g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}.$$

После замены $x$ на $\frac{1}{x}$ имеем

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}-6g(x)=5x.$$

Исключая из этих уравнений $g\left(\frac{1}{x}\right)$, получаем уравнение относительно $g(x)$:

$$6g^2(x)+5xg(x)-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=-x,\\ g(x)=\frac{x}{6}.\end{array}\right.$$

Равенство $g(x)=-x$ невозможно. Поэтому

$$\cos\left(2f(x)\right)=\frac{x}{6},$$

следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x}{6}\right)$.

### Вариант 14

**1.** 0, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\ge 0$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $k\ge 0$.

**2.** $\left(-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}\right)\Big/2$, где $n$ = 6, 7, …, 250.

*Указание.* Пусть $q$ – знаменатель прогрессии, а $4n$ – упомянутое в условии целое число. Тогда

$$10\left(q+q^2\right)=4n\le 1000,\ q>1.$$

Отсюда

$$q=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-1+\frac{8n}{5}}\right),\ \text{где } n\le 250.$$

Из условия $q>1$ следует, что $10\left(q^2+q\right)<4n$ при $q=1$, т.е. $n>5$.

**3.** $14\frac{1}{2}$ ч. *Указание.* Пусть единица площади – это площадь одного поля, а тракторы вспахивают поле за $x$, $y$ и $z$ часов соответственно. Из условия получаем

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{3}{y},\\ x+2=z,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{36}.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x=16$, $y=48$, $z=18$. Если переездов с одного поля на другое нет, то на одном поле работает один трактор, на другом – два, причем работа закончится не раньше, чем через 16 часов.

Если же предположить, что есть переезды с одного поля на другое, то «ущерб» от них был бы минимален при следующих условиях:

1) переезд всего один, и выполняет его наименее производительный трактор, т.е. второй;

2) все три трактора заканчивают работу одновременно (что означает отсутствие их простоев).

Эти условия выполняются, если второй трактор начинает работу с первым в течение $t$ ч на одном поле, а затем переезжает на другое поле, где заканчивает работу с третьим за $s$ ч. Составив систему уравнений и решив ее, получим, что общее время при таком порядке работы равно 14,5 ч, что меньше 16 ч.

**4.** $\left(3;1+\sqrt{5}\right)\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. *Указание.* Неравенство равносильно такому:

$$\log_{x^2-2x-3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)(x+4)}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3}\left|x^2-2x-2\right|.$$

**5.** $\sqrt{769}/8$. *Указание.* Пусть $SA = x$. Выразите через $x$ объем $V$ пирамиды, пользуясь формулами $V = \frac{1}{3}xS_{ABC}$ и $V = \frac{1}{3}rS$, где $S$ – площадь поверхности пирамиды, и получите уравнение, решив которое, найдите $x$.

Радиус описанной сферы равен гипотенузе прямоугольного треугольника $OAO'$, где $O$ – центр сферы, $O'$ – центр окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$.

### Вариант 15

**1.** 4; $\left(1+\sqrt{7}\right)/2$. **2.** 4%.

**3.** $(-2; -3/2)\cup(1; +\infty)$. **4.** $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

**5.** 300/17. *Указание.* Докажите, что вписанная окружность касается стороны $BC$ в ее середине.

**6.** $a = \frac{t \pm \sqrt{t^2+4t-4}}{2}$, где $t = 16\Big/\left(2+n+\frac{1}{n}\right)$ при $n = -5, -4, -3, -2, 1, 2, \ldots, 17$.

### Вариант 16

**1.** $(-\infty; 2)\cup\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$. **2.** 1. **3.** $\frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

**4.** $(-3; 3)\cup(3; 4)$.

**5.** $[-4; 2]$. *Указание.* Условие равносильно тому, что неравенство $\left|x^2-2x+a\right| \leq 5$ выполняется при всех $x \in [-1; 2]$, а это равносильно справедливости неравенства

$$(t+a-6)(t+a+4) \leq 0,$$

где $t = (x-1)^2$, при всех $0 \leq t \leq 4$.

**6.** 30. **7.** 2.

## ФИЗИКА

### Физический факультет

**1.** Считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью $v_O$, равной скорости движения оси катушки, и вращения с угловой скоростью $\omega$ вокруг этой оси. Поскольку качение катушки происходит без проскальзывания, $\omega = v_O/R$. В тот момент, когда скорость оси катушки равна $v_O$, скорость точки $B$ должна быть равна $v_B = v_O - \omega r = (R-r)v_O/R$, а потому при движении катушки с течением времени длина отрезка нерастяжимой нити $AB$ должна уменьшаться. При этом искомый промежуток времени $\tau$ должен удовлетворять уравнению

$$L(\tau) = \frac{L_0}{n} = L_0 - \frac{(a_0-a)\tau^2}{2},$$

где $a_0 = aR/(R-r)$ – ускорение центра катушки. Отсюда находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2L_0(n-1)(R-r)}{anr}}.$$

**2.** Поскольку нить прикреплена к середине одного из верхних горизонтальных ребер и ее тянут перпендикулярно этому ребру, из соображений симметрии можно утверждать, что куб должен начать поворачиваться вокруг одного из нижних ребер, параллельных тому ребру, к середине которого прикреплена нить. На рисунке 18 показаны сечения куба вертикальной плоскостью, в которой располагается нить; здесь же показаны силы, действующие на куб, когда за нить тянут вверх или вниз под углом $\alpha_i$ к горизонту с силой $F_i$ такой, что при ее незначительном увеличении куб начал бы поворачиваться.

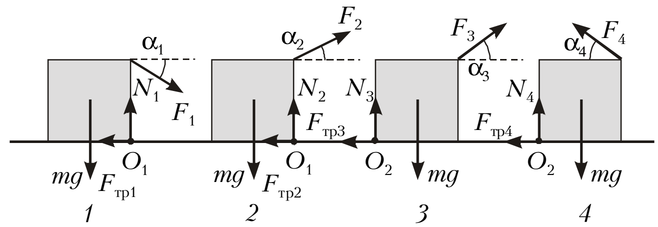

*Рис. 18*

В первом случае угол наклона нити к горизонту $\alpha_1$ будем считать отрицательным, а во всех остальных – положительным. Поскольку куб является однородным, действующая на него сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к центру куба. Результирующая сил реакции крышки, как это обычно и делают, изображена в виде двух составляющих: нормальной $\vec{N}_i$ и тангенциальной $\vec{F}_{трi}$. Точки приложения этих составляющих в первом и втором случаях обозначены на рисунке буквой $O_1$, а в третьем и четвертом – $O_2$.

Поскольку куб не должен скользить по крышке, согласно второму закону Ньютона должны выполняться равенства

$$N_i - mg + F_i \sin\alpha_i = 0,$$

$$F_{трi} - F_i \cos\alpha_i = 0,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$. При этом

$$F_{трi} \leq \mu N_i.$$

Для того чтобы куб поворачивался относительно осей, проходящих через точки $O_1$ или $O_2$, алгебраическая сумма моментов сил в рассматриваемых случаях должна быть равна нулю:

$$0{,}5amg - aF_1\cos\alpha_1 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_2\cos\alpha_2 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_3\sin\alpha_3 + aF_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_4\sin\alpha_4 - aF_4\cos\alpha_4 = 0,$$

где $a$ – ребро куба.

Из написанных уравнений следует, что величина силы натяжения нити в первом и втором случаях должна быть равна $F_i = mg/(2\cos\alpha_i)$, причем $\operatorname{tg}\alpha_i \leq 1/\mu - 2$. Поскольку по условию задачи $\mu < 0{,}5$, то $\operatorname{tg}\alpha_i < 0$. Значит, второй случай при заданных условиях не реализуется, а в первом случае

$$F_{1\min} = 0{,}5\sqrt{5-\frac{4}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}}\,mg.$$

В третьем случае

$$F_3 = \frac{mg}{2(\sin\alpha_3 - \cos\alpha_3)},$$

причем

$$F_{3\min} = \frac{mg}{2} < F_{1\min},$$

и нить следует тянуть вертикально вверх.

Наконец, в четвертом случае

$$F_4 = \frac{mg}{2(\sin\alpha_4+\cos\alpha_4)} = \frac{mg}{2\sqrt{2}\sin(\alpha_4+\pi/4)}.$$

Поскольку максимального значения синус угла достигает тогда, когда угол становится равным $\pi/2$, то при $\alpha_4 = \pi/4$ искомая сила натяжения нити равна

$$F_4\left(\alpha_4 = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{mg}{2\sqrt{2}}.$$

Конечно, это утверждение будет верно, если $1/3 \le \mu$. Если же $0 \le \mu \le 1/3$, то нить следует тянуть под углом $\alpha_4 = \arccos\left(\mu\Big/\sqrt{(1-2\mu)^2+\mu^2}\right)$. При этом искомая сила натяжения нити должна быть равна

$$F_4(0 \le \mu \le 1/3) = mg\frac{\sqrt{(1-2\mu)^2+\mu^2}}{2(1-\mu)}.$$

**3.** Давление воды в любой нижней точке кольца должно быть ровно $\rho_а + \rho_в g(H-h)$, где $\rho_а$ – атмосферное давление, а $H$ – высота кольца. С другой стороны, это давление должно быть равно давлению, обусловленному действием сил тяжести кольца и давления воздуха на кольцо, т.е. должно выполняться соотношение $\rho_а + \rho_в g(H-h) = \rho_а + \rho_д gH$. Следовательно,

$$\rho_в(H-h) = \rho_д H.$$

При заливании масла в отверстие в кольце, поскольку плотность масла меньше плотности дерева, нижний уровень масла не может опуститься ниже горизонтальной плоскости, совпадающей с нижними точками кольца. Поэтому из отверстия в кольце масло вытеснит лишь часть воды, а толщина $h_1$ слоя воды, оставшейся внутри кольца, должна удовлетворять уравнению

$$\rho_в(H-h) = \rho_в h_1 + \rho_м(H-h_1).$$

При этом глубина погружения кольца в воду изменяться не может. Из сказанного ясно, что одновременно с увеличением объема залитого в кольцо масла уровень воды в сосуде и кольцо будут одновременно подниматься. Поэтому для искомой высоты подъема воды можно записать уравнение

$$xR^2 = (H-h-h_1)r^2.$$

Решая совместно все полученные уравнения, определим искомую высоту подъема воды:

$$x = \frac{hr^2\rho_м}{(\rho_в-\rho_м)R^2}.$$

**4.** В исходном состоянии ртуть полностью заполняла левую часть сосуда, но не оказывала давления на его верхнюю грань. Значит, давление воздуха было равно

$$p_1 = \frac{\rho gh}{2},$$

где $\rho$ – плотность ртути, а $h$ – высота поршня. Если высоту столба ртути при конечной температуре обозначить $h_2$, то давление воздуха в правой части сосуда должно удовлетворять соотношению

$$p_2 h = \frac{\rho g h_2^2}{2}.$$

Таким образом, для интересующего нас перемещения поршня $x$ можно записать равенство

$$hL = h_2(L+x),$$

т.к. площадь поперечного сечения сосуда неизменна.

Для воздуха на основании объединенного газового закона получим

$$p_1V_1 = np_2V_2, \text{ или } p_1L = np_2(L-x).$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим $x/L = z$. Тогда из составленных ранее уравнений следует

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h^2}{h_2^2} = (1+z)^2 = (1-z)n.$$

Последнее соотношение эквивалентно уравнению

$$z^2 + (2+n)z + 1 - n = 0,$$

решая которое, найдем

$$x = 0{,}5\left(\sqrt{n(n+8)} - 2 - n\right)L \approx 0{,}14L.$$

**5.** Как известно, коэффициент полезного действия цикла равен отношению работы, совершенной газом за цикл, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя за то же время. На участке *1–2* объем газа увеличивается при одновременном увеличении его давления, работа газа на этом участке равна

$$A_{12} = \frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}.$$

На участке *2–3* газ работы не совершает, а на участке *3–1* работа отрицательна и равна

$$A_{31} = (V_1 - V_2)p_1.$$

Таким образом, работа газа за цикл равна

$$A = A_{12} + A_{31} = \frac{(p_2-p_1)(V_2-V_1)}{2}.$$

Определим теперь количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя. На участке *1–2* газ совершает работу, при этом его давление и объем, а с ними температура и внутренняя энергия газа должны возрастать. Поэтому на этом участке газ должен получать тепло. На основании первого закона термодинамики,

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = A_{12} + 1{,}5R(T_2 - T_1).$$

На втором участке температура газа уменьшается, и газ не совершает работы; следовательно, на этом участке газ должен отдавать тепло холодильнику. Можно доказать, что и на третьем участке газ отдает тепло холодильнику. Таким образом, за цикл газ получает от нагревателя количество теплоты $Q_{12}$. Легко видеть, что в точке *1* температура газа минимальна, а в точке *2* – максимальна, поэтому $T_2/T_1 = n$. В то же время, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, температура газа в точке *3* равна $T_3 = p_1V_2/R$. Поскольку на участке *2–3* газ охлаждается изохорически, а на участке *3–1* изобарически, $T_3 = T_1V_2/V_1 = p_1T_2/p_2$. Отсюда, с учетом того, что $p_1/V_1 = p_2/V_2$ (точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат $pV$-диаграммы), получим

$$T_3 = \sqrt{T_1T_2} = \sqrt{n}\,T_1.$$

Тогда

$$A = 0{,}5RT_1\left(\sqrt{n}-1\right)^2, \quad Q_{12} = 2RT_1(n-1),$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{\sqrt{n}-1}{4\left(\sqrt{n}+1\right)}.$$

Максимально достижимый КПД, получающийся при использовании цикла Карно, равен

$$\eta_К = 1 - \frac{T_х}{T_н},$$

где $T_н$ – температура нагревателя ($T_1$), а $T_х$ – холодильника ($T_2$). Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{\eta_К}{\eta} = \frac{4\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{n} = 9.$$

**6.** По условию задачи морозильник работает по циклу Карно. В школьном курсе обычно не анализируется работа холодильных тепловых машин, а рассматриваются лишь тепловые двигатели. Однако, поскольку цикл Карно является обратимым, соотношения между совершаемой рабочим веществом работой, потребляемым от нагревателя и передаваемым холодильнику теплом не должны изменяться при изменении направления прохождения цикла.Отсюда легко найти искомую минимальную мощность мотора:

$$N = \frac{Q(T_2 - T_1)}{\tau T_1 \eta_м} \approx 11 \text{ Вт}.$$

**7.** После перевода ключа $K$ в положение *1* конденсатор емкостью $C_1$ начинает заряжаться через диод $D_1$ и резистор $R$. К моменту перевода ключа в положение *2* заряд этого конденсатора станет равным $q_{11} = C_1\mathcal{E}$. При этом конденсатор емкостью $C_2$ должен оставаться незаряженным, т.е. $q_{21} = 0$. После переключения ключа в положение *2* диод $D_1$ переходит в непроводящее состояние, а включенный последовательно с конденсаторами диод $D_2$ можно заменить проводником с нулевым сопротивлением. Если установившиеся напряжения на первом и втором конденсаторах после перевода ключа в положение *2* обозначить $U_1$ и $U_2$, а заряды этих конденсаторов $q_{12}$ и $q_{22}$, то можно записать $q_{12} = C_1U_1$, $q_{22} = C_2U_2$. По прошествии достаточно большого промежутка времени напряжение на резисторе $R$ должно стать равным нулю (конденсаторы полностью зарядились, и, следовательно, ток в цепи прекратился), поэтому сумма напряжений на конденсаторах будет равна ЭДС батареи $\mathcal{E}$. В то же время на основании закона сохранения заряда можно записать равенство $q_{12} - q_{22} = -q_{11}$. С учетом двух предыдущих соотношений последнее выражение эквивалентно уравнению

$$(\mathcal{E} - U_2)C_1 - U_2C_2 = -\mathcal{E}C_1,$$

решая которое, определим искомый заряд конденсатора емкостью $C_2$:

$$q_{22} = \frac{2C_1C_2\mathcal{E}}{C_1 + C_2}.$$

**8.** Пронизывающий рамку магнитный поток в момент времени $t$ равен

$$\Phi(t) = BNS\cos\alpha(t),$$

где $\alpha(t) = \omega t$ – угол между вектором индукции $\vec{B}$ внешнего поля и нормалью к плоскости рамки. Изменение этого потока приводит к возникновению ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BNS\omega\sin\omega t.$$

Поскольку проводники рамки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно $R$, согласно закону Ома в рамке возникает ток

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

При этом выделяется мгновенная тепловая мощность

$$P(t) = RI^2(t).$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что для поддержания неизменной скорости вращения рамки потери энергии, обусловленные выделением тепла, должны компенсироваться работой внешних сил

$$\Delta A(t) = M(t)\omega\Delta t.$$

Отсюда следует, что

$$M(t)\omega = P(t) = \frac{(BNS\omega\sin\omega t)^2}{R}.$$

Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно 0,5, а среднее значение момента сил, действующих на рамку, по условию равно $M_{ср}$, получаем

$$B = \frac{\sqrt{2RM_{ср}}}{NS\sqrt{\omega}}.$$

**9.** По условию задачи пучок света, падающий нормально на диаметральную плоскость разреза диска, должен выйти перпендикулярно указанной плоскости. Поэтому можно утверждать, что ход луча света в диске должен быть симметричным относительно радиуса, перпендикулярного плоскости разреза. На рисунке 19 показан ход двух лучей, удовлетворяющих этому условию, причем первый луч испытывает два, а второй – три отражения. Поскольку нормалью к боковой поверхности диска в заданной точке является радиус, проведенный в эту точку, на основании закона отражения можно утверждать, что свет внутри диска распространяется вдоль сторон правильного многоугольника. Как известно, сумма углов правильного $2k$-угольника равна $\beta_k = 2\pi(k-1)$. Поэтому угол $\alpha_k$ падения луча, испытывающего при распространении в половине диска $k$ отражений и выходящего параллельно падающему лучу, равен

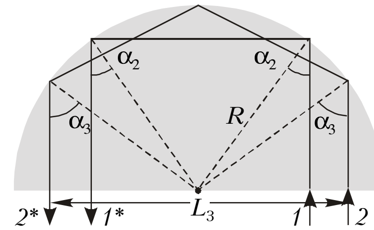

Рис. 19

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{4k} = 0{,}5\pi\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

По условию задачи интенсивность выходящего пучка света лишь незначительно отличается от интенсивности падающего пучка. Это возможно только в том случае, если при отражении света на границе лед—воздух имеет место явление полного внутреннего отражения. Как известно, это явление возникает, когда синус угла падения становится равным обратной величине относительного показателя преломления, т.е. угол падения $\alpha$ удовлетворяет условию $\alpha \ge \arcsin(1/n) \approx 50{,}3^\circ$. Отсюда следует, что условия задачи будут выполнены, если при своем распространении в половине диска свет будет испытывать не менее трех отражений. Обратившись к рисунку 19, определим возможные значения искомого расстояния:

$$L_k = 2R\sin\left(0{,}5\pi\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right), \text{ где } k = 3,\ 4,\ \ldots$$

**10.** Поскольку точечный источник помещен в главный фокус линзы, выходящий из линзы пучок света параллелен ее главной оптической оси. Учитывая, что эта ось перпендикулярна передней грани призмы, а диаметр линзы больше размеров этой грани, следует считать, что вся призма полностью залита светом, и падающий на призму пучок проходит через ее переднюю грань, не изменяя своего направления распространения. При выходе из призмы пучок света за счет преломления расщепляется на два пучка параллельных лучей. Согласно закону преломления, с учетом принятых на рисунке 20 обозначений, можно утверждать, что оси выходящих пучков образуют с осью падающего на призму пучка углы $\beta_1$ и $\beta_2$ такие, что $\beta_1 = \gamma_1 - \alpha$ и $\beta_2 = \gamma_2 - \alpha$, причем $\sin\gamma_1 = n_1\sin\alpha$ и $\sin\gamma_2 = n_2\sin\alpha$. По условию задачи $\alpha \ll 1$, поэтому $\beta_1 \approx (n_1 - 1)\alpha$ и $\beta_2 \approx (n_2 - 1)\alpha$. Поскольку $n_1 > n_2$, получаем $\beta_1 > \beta_2$. Интерференционная картина может наблюдаться только в области перекрытия выходящих из призмы пучков, т.е. внутри параллелограмма $OBEK$, а плоскость экрана перпендикулярна главной оптической оси линзы, поэтому максимальный размер интерференционной картины

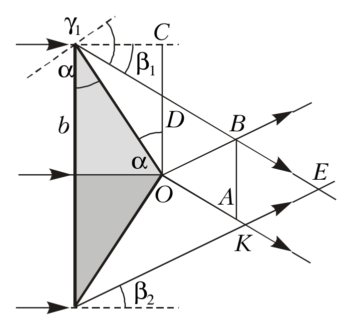

Рис. 20

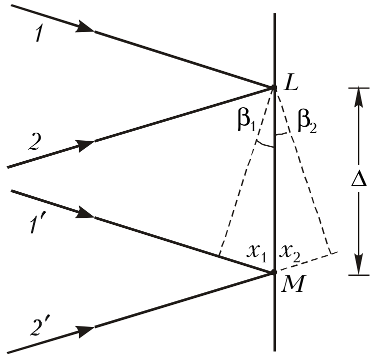


*Рис. 21*

будет равен длине отрезка $AB$, равного

$$AB = OD = OC - DC = b - b\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \approx \left(1-\left(n_1-1\right)\alpha^2\right)b.$$

Для вычисления ширины $\Delta$ интерференционной полосы обратимся к рисунку 21, на котором изображено сечение плоскостью чертежа той части экрана, которая находится в области перекрытия световых пучков. Пусть разность хода пересекающихся в точке $L$ световых лучей *1* и *2* равна нулю. Тогда в этой точке будет наблюдаться интерференционный максимум нулевого порядка, а в точке $M$ – максимум первого порядка, если разность хода $x_1 + x_2$ попадающих в эту точку лучей $1'$ и $2'$ равна $\lambda$. Поскольку $x_1 = = \Delta\cdot\sin\beta_1 \approx \Delta\cdot\beta_1$ и $x_2 = = \Delta\cdot\sin\beta_2 \approx \Delta\cdot\beta_2$, то искомую ширину можно найти из соотношения

$$\lambda \approx \left(n_1+n_2-2\right)\alpha\Delta.$$

Видно, что ширина наблюдаемой интерференционной полосы не зависит от расстояния, на котором находится экран от призмы, поэтому искомое максимальное число интерференционных полос должно быть равно целой части отношения

$$\frac{AB}{\Delta} \approx \frac{\left(n_1+n_2-2\right)\left(1-\left(n_1-1\right)\alpha^2\right)b\alpha}{\lambda}.$$

### *Факультет вычислительной математики и кибернетики*

**1.** $v_0 = va_1/\left(a_1-a_2\right) = 100$ км/ч.

**2.** $a = g\sqrt{9\mu^2+4} = 20{,}5$ м/с$^2$. **3.** $\alpha = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$.

**4.** $\Delta h = \dfrac{2Mah}{p_0S + M(g-a)} = 4$ см.

**5.** $Q = 5l\left(p_0S + Mg\sin\alpha\right)/2 \approx 73{,}3$ Дж.

**6.** $q = \dfrac{q_1r_2 - q_2r_1}{r_1+r_2} \approx 1{,}67\cdot10^{-9}$ Кл.

**7.** $L = \dfrac{l}{1-\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{\left(m_1+m_2\right)q_1\left|q_2\right|}} \approx 3{,}85$ м.

**8.** $I_{\max} = U\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L\left(C_1+C_2\right)}} = 0{,}75$ А. **9.** $\Delta n = \dfrac{\varphi}{\alpha} = 0{,}6$.

**10.** $d = \dfrac{F(2b-a)}{2b-a-2F} = 30$ см.

### *Химический факультет*

**1.** $F_2 = mg + F_1/2 \ge 15$ Н.

**2.** $\Delta p = Mv\,\mathrm{tg}\,\alpha = 400$ кг·м/с.

**3.** $h = H/\sqrt{2} \approx 5{,}66$ м.

**4.** $\varphi = \left(\varphi_1V_1 + \varphi_2V_2\right)/\left(V_1+V_2\right) \approx 27\%$.

**5.** $\Delta T = 2A/\left(3R(1-\eta)\right) = 2{,}5$ К.

**6.** $E = \sqrt{v^2 - v_0^2}\Big/\left(\tau e/m\right) \approx 8{,}9\cdot10^4$ В/м.

**7.** $r = (k-1)R = 4$ Ом.

**8.** $U = m\left(\Delta\varphi/\Delta t\right)^2 R^2/(2e) = 2{,}9\cdot10^4$ В, где $\Delta\varphi = \pi/4$ рад.

**9.** $d = (\Gamma-1)/(\Gamma D) = 6$ см.

**10.** $I = W\lambda e/\left(hc\Delta t\right) \approx 5\cdot10^{-3}$ А, где $c = 3\cdot10^8$ м/с.

*Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:*

*Курьер образования*
http://www.courier.com.ru

*Vivos Voco!*
http://vivovoco.nns.ru
*(раздел «Из номера»)*

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ
**Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Л.Н.Тишков, П.И.Чернуский**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
**Л.З.Симакова**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.**
**Рег. св-во №0110473**

**Адрес редакции:**
**117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,**
**тел. 930-56-48**

**Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени**
**Чеховском полиграфическом комбинате**
**Комитета Российской Федерации по печати**
**142300 г.Чехов Московской области**
**Заказ №**