такому:

$$\log_{x^2-2x-3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)(x+4)}{x+1}\ge\log_{x^2-2x-3}\left|x^2-2x-2\right|.$$

5. $\sqrt{769}/8$. *Указание.* Пусть $SA = x$. Выразите через x объем V пирамиды, пользуясь формулами $V=\frac{1}{3}xS_{ABC}$ и $V=\frac{1}{3}rS$, где S – площадь поверхности пирамиды, и получите уравнение, решив которое, найдите x.
Радиус описанной сферы равен гипотенузе прямоугольного треугольника OAO', где O – центр сферы, O' – центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Вариант 15

1. 4; $\left(1+\sqrt{7}\right)/2$. **2.** 4%.

3. $(-2;\,-3/2)\cup(1;\,+\infty)$. **4.** $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

5. 300/17. *Указание.* Докажите, что вписанная окружность касается стороны BC в ее середине.

6. $a=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4t-4}}{2}$, где $t=16\Big/\left(2+n+\frac{1}{n}\right)$ при $n = -5, -4, -3, -2, 1, 2, \ldots, 17$.

Вариант 16

1. $(-\infty;\,2)\cup\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4};\,+\infty\right)$. **2.** 1. **3.** $\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

4. $(-3;\,3)\cup(3;\,4)$.

5. $[-4;\,2]$. *Указание.* Условие равносильно тому, что неравенство $\left|x^2-2x+a\right|\le 5$ выполняется при всех $x\in[-1;\,2]$, а это равносильно справедливости неравенства

$$(t+a-6)(t+a+4)\le 0,$$

где $t=(x-1)^2$, при всех $0\le t\le 4$.

6. 30. **7.** 2.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью v_O, равной скорости движения оси катушки, и вращения с угловой скоростью ω вокруг этой оси. Поскольку качение катушки происходит без проскальзывания, $\omega = v_O/R$. В тот момент, когда скорость оси катушки равна v_O, скорость точки B должна быть равна $v_B = v_O - \omega r = (R-r)v_O/R$, а потому при движении катушки с течением времени длина отрезка нерастяжимой нити AB должна уменьшаться. При этом искомый промежуток времени τ должен удовлетворять уравнению

$$L(\tau)=\frac{L_0}{n}=L_0-\frac{(a_0-a)\tau^2}{2},$$

где $a_0 = aR/(R-r)$ – ускорение центра катушки. Отсюда находим

$$\tau=\sqrt{\frac{2L_0(n-1)(R-r)}{anr}}.$$

2. Поскольку нить прикреплена к середине одного из верхних горизонтальных ребер и ее тянут перпендикулярно этому ребру, из соображений симметрии можно утверждать, что куб должен начать поворачиваться вокруг одного из нижних ребер, параллельных тому ребру, к середине которого прикреплена нить. На рисунке 18 показаны сечения куба вертикальной плоскостью, в которой располагается нить; здесь же показаны силы, действующие на куб, когда за нить тянут вверх или вниз под углом α_i к горизонту с силой F_i такой, что при ее незначительном увеличении куб начал бы поворачиваться.

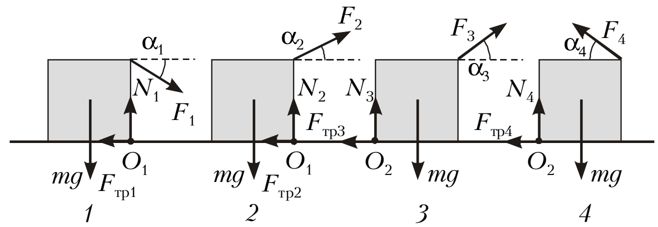

Рис. 18

В первом случае угол наклона нити к горизонту α_1 будем считать отрицательным, а во всех остальных – положительным. Поскольку куб является однородным, действующая на него сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к центру куба. Результирующая сил реакции крышки, как это обычно и делают, изображена в виде двух составляющих: нормальной $\vec{N}_i$ и тангенциальной $\vec{F}_{трi}$. Точки приложения этих составляющих в первом и втором случаях обозначены на рисунке буквой O_1, а в третьем и четвертом – O_2.
Поскольку куб не должен скользить по крышке, согласно второму закону Ньютона должны выполняться равенства

$$N_i - mg + F_i\sin\alpha_i = 0,$$

$$F_{трi} - F_i\cos\alpha_i = 0,$$

где i = 1, 2, 3, 4. При этом

$$F_{трi}\le\mu N_i.$$

Для того чтобы куб поворачивался относительно осей, проходящих через точки O_1 или O_2, алгебраическая сумма моментов сил в рассматриваемых случаях должна быть равна нулю:

$$0{,}5amg - aF_1\cos\alpha_1 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_2\cos\alpha_2 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_3\sin\alpha_3 + aF_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$0{,}5amg - aF_4\sin\alpha_4 - aF_4\cos\alpha_4 = 0,$$

где a – ребро куба.
Из написанных уравнений следует, что величина силы натяжения нити в первом и втором случаях должна быть равна $F_i = mg/(2\cos\alpha_i)$, причем $\operatorname{tg}\alpha_i\le 1/\mu-2$. Поскольку по условию задачи $\mu<0{,}5$, то $\operatorname{tg}\alpha_i<0$. Значит, второй случай при заданных условиях не реализуется, а в первом случае

$$F_{1\min}=0{,}5\sqrt{5-\frac{4}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}}\,mg.$$

В третьем случае

$$F_3=\frac{mg}{2(\sin\alpha_3-\cos\alpha_3)},$$

причем

$$F_{3\min}=\frac{mg}{2}<F_{1\min},$$

и нить следует тянуть вертикально вверх.
Наконец, в четвертом случае

$$F_4=\frac{mg}{2(\sin\alpha_4+\cos\alpha_4)}=\frac{mg}{2\sqrt{2}\sin(\alpha_4+\pi/4)}.$$

Поскольку максимального значения синус угла достигает тогда, когда угол становится равным $\pi/2$, то при $\alpha_4 = \pi/4$ иско-