докажите это! Следовательно, наибольшее значение $\operatorname{tg} g_3(x)$ равно

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)\right).$$

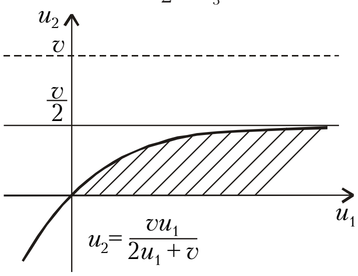

Рис. 16

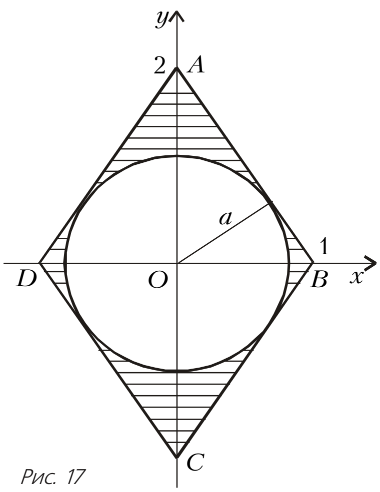

Рис. 17

5. См. рис.16.

6. а) $2/\sqrt{5}$; б) $4(5-\pi)/5$. *Указание.* Первое уравнение задает на плоскости xOy ромб, а второе – окружность с радиусом a и центром в начале координат (рис.17). Условию а) отвечает значение параметра a, при котором окружность является вписанной в ромб.

б) На рисунке заштрихованы точки, удовлетворяющие данному неравенству.

Вариант 12

1. 10 л и 20 л.

2. 11.

3. $(0;1)\cup\{2\}\cup(4;+\infty)$.

4. $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

5. $-3/4$; 0; $2/9$.

6.

7	+	1	=	8		
–		×		:		
1	+	3	=	4		
‖		‖		‖		
6	:	3	=	2		

Вариант 13

1. $\{0\}$. **2.** 4. **3.** $[-8;-6)\cup\left(3;\sqrt{10}\right)$.

4. 120°, 30°, 30°.

5. $\frac{\pi}{12}+2\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{12}+2\pi l$, $l\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из условия следует, что

$$\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Осталось найти решения этого уравнения и выбрать те из них, при которых возрастают соответствующие показатели степени.

6. $16-\frac{13}{9}\pi$. *Указание.* Докажите, что шар касается сторон основания пирамиды.

7. $\left[3\sqrt{2};6\right]$. Обозначив через $g(x)=\cos(2f(x))$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{g(x)}-6g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}.$$

После замены x на $\frac{1}{x}$ имеем

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}-6g(x)=5x.$$

Исключая из этих уравнений $g\left(\frac{1}{x}\right)$, получаем уравнение относительно $g(x)$:

$$6g^2(x)+5xg(x)-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=-x,\\ g(x)=\frac{x}{6}.\end{array}\right.$$

Равенство $g(x)=-x$ невозможно. Поэтому

$$\cos(2f(x))=\frac{x}{6},$$

следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x}{6}\right)$.

Вариант 14

1. 0, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\geq 0$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $k\geq 0$.

2. $\left(-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}\right)\Big/2$, где $n=6,7,\ldots,250$.

Указание. Пусть q – знаменатель прогрессии, а $4n$ – упомянутое в условии целое число. Тогда

$$10\left(q+q^2\right)=4n\leq 1000,\ q>1.$$

Отсюда

$$q=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-1+\frac{8n}{5}}\right),\ \text{где } n\leq 250.$$

Из условия $q>1$ следует, что $10\left(q^2+q\right)<4n$ при $q=1$, т.е. $n>5$.

3. $14\frac{1}{2}$ ч. *Указание.* Пусть единица площади – это площадь одного поля, а тракторы вспахивают поле за x, y и z часов соответственно. Из условия получаем

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{3}{y},\\ x+2=z,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{36}.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x=16$, $y=48$, $z=18$. Если переездов с одного поля на другое нет, то на одном поле работает один трактор, на другом – два, причем работа закончится не раньше, чем через 16 часов.

Если же предположить, что есть переезды с одного поля на другое, то «ущерб» от них был бы минимален при следующих условиях:

1) переезд всего один, и выполняет его наименее производительный трактор, т.е. второй;

2) все три трактора заканчивают работу одновременно (что означает отсутствие их простоев).

Эти условия выполняются, если второй трактор начинает работу с первым в течение t ч на одном поле, а затем переезжает на другое поле, где заканчивает работу с третьим за s ч. Составив систему уравнений и решив ее, получим, что общее время при таком порядке работы равно 14,5 ч, что меньше 16 ч.

4. $\left(3;1+\sqrt{5}\right)\cup\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. *Указание.* Неравенство равносильно