Вариант 8

1. $(-\infty;\,-2)\cup[-1;\,+\infty)$. **2.** $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $3\sqrt{15}/4$. **4.** $\left(-6;\,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\,2\right)\cup\left(2;\,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2};\,10\right)$.

Указание. Преобразуйте неравенство с помощью замены $y = \log_2|x-2|$.

5. $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}$. Пусть радиусы первых трех шаров с центрами O_1, O_2, O_3 равны R. Рассмотрим сечение призмы плоскостью $O_1O_2O_3$ (рис.14). Сторона основания призмы равна

$$a = 2R\left(1+\sqrt{3}\right),$$

т.е. $$R = \frac{a}{2\left(1+\sqrt{3}\right)},$$

$$O_1A = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

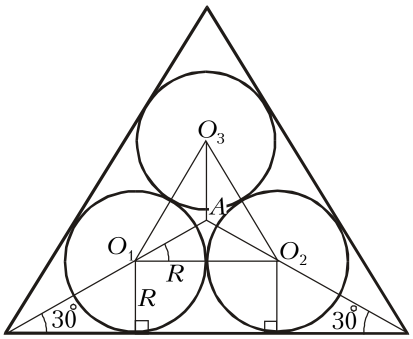

Рис. 14

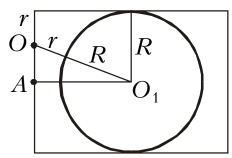

Рис. 15

Радиус r четвертого шара с центром O находим из прямоугольного треугольника OAO_1 (рис.15):

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2, \text{ откуда } \quad r = \frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}.$$

Вариант 9

1. $(-\infty;\,1]\cup(3/2;\,+\infty)$. **2.** 1; 2. **3.** $24/7$.

4. $(0;\,1)\cup(3;\,5)$.

5. $\pm\sqrt{8-\left(\dfrac{(-1)^n}{6}+n\right)^2}$, где $n = 0,\ 1,\ 2$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно такому:

$$\pi\sqrt{8-x^2} = (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

где $n = 0,\ 1,\ 2$. Это следует из неотрицательности левой части и из того, что

$$\pi\sqrt{8-x^2} \le 2\sqrt{2}\pi < \left(2+\frac{5}{6}\right)\pi.$$

(Последняя оценка следует из того, что $12\sqrt{2} < 17$.)

6. $1+\sqrt{3}$. *Указание.* Найдите углы α, β, γ нового треугольника, квадрат радиуса описанной окружности, а затем воспользуйтесь формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

7. $5/2$. *Указание.* При $x = -1/2$ левая часть уравнения равна $5/2$ независимо от значения b, так что $a = \dfrac{5}{2}$ удовлетворяет условию. Если $a < \dfrac{5}{2}$, то при $b = \dfrac{1}{2}$ получаем

$$|x-2| + \frac{1}{2}|2x+1| \ge \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

а при $a > \dfrac{5}{2}$ и $b = -\dfrac{1}{2}$ имеем

$$|x-2| - \frac{1}{2}|2x+1| \le \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

так что $a = 5/2$ – единственное возможное значение a.

Вариант 10

1. $\left(\dfrac{4}{5};\,4\right]$. **2.** $\dfrac{120}{119}$. **3.** $1\dfrac{1}{5}$ часа. **4.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$.

5. $\{(10;\,15);\,(15;\,10)\}$. **6.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$.

7. $\left\{0;\,1;\,\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(3\sqrt{1-x^2}-1\right)\left((x-1)^2-\sqrt{1-x^2}\right) = 0.$$

8. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2-ab+b^2}-\dfrac{a}{4}$; $\dfrac{b}{a}\in\left(1;\,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. Пусть r – радиус любого из восьми одинаковых шаров, при этом $a = 4r$, $b > a$. Центры шаров – вершины параллелепипеда с ребрами $2r$; $2r$; $b-2r$. Центр девятого шара (радиуса R) находится в центре этого параллелепипеда, поэтому

$$R + r = \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2+(2r)^2+(b-2r)^2},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4}.$$

Используя ограничение задачи $R \le \dfrac{a}{4}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4} \le \frac{a}{4},$$

из которого находим, что

$$1 < \frac{b}{a} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Вариант 11

1. $\left(19+\sqrt{137}\right)/8$. *Указание.* Выполните замену $y = \sqrt{3x+2}$.

2. -25; 3. **3.** $\dfrac{180^\circ}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\pi}$.

4. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$. *Указание.* Условие означает, что $x \ge 2$. Функция $g_1(x) = \sqrt{1+3x-x^2}$ определена на отрезке $\left[\left(3-\sqrt{13}\right)/2;\,\left(3+\sqrt{13}\right)/2\right]$, причем на отрезке $J = \left[2;\,\left(3+\sqrt{13}\right)/2\right]$ она убывает. Следовательно, область ее значений – отрезок $\left[0;\,\sqrt{3}\right]$. Функция $g_2(x) = 2 - g_1(x)$ возрастает, и ее область значений – отрезок $\left[2-\sqrt{3};\,2\right]$, а функция $g_3(x) = \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} g_2(x)$ определена и убывает на отрезке J. Ее область значений – отрезок $\left[\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}2;\,\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$. Последний отрезок целиком содержится в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ –