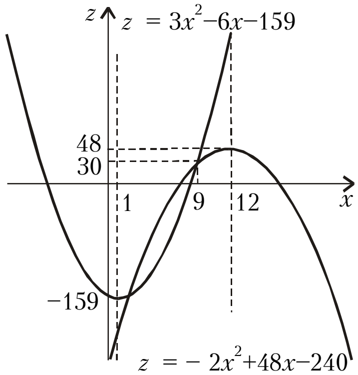

Рис. 10

Исключая y из уравнения и подставляя в неравенства, имеем

$$\begin{cases} z \ge 3x^2 - 6x - 159, \\ z \le -2x^2 + 48x - 240. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация на плоскости (x, z) дает фигуру между двумя параболами (рис.10). Точки пересечения этих парабол:

$$x_1 = \frac{9}{5};\ x_2 = 9.$$

Так как вершина параболы $z = -2x^2 + 48x - 240$ лежит правее отрезка $\left[\frac{9}{5}; 9\right]$, то максимальное значение z достигается в точке $x = 9$. Оно равно 30.

6. 2. Пусть R_1 и R_2 – радиусы, а O_1 и O_2 – центры окружностей, проходящих через пары точек A, C и B, D соответственно (см. рис. 11 и рис. 12), $O_1O_2 = \rho$ – расстояние между центрами окружностей, EF – их общая хорда, пересекающая прямую O_1O_2 в точке G. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, а точка H – проекция O на прямую O_1O_2. Пусть Δ – расстояние от точки O до прямой EF, $O_1O = r_1$, $O_2O = r_2$. Пусть $d_{\max} = \max\{AC, BD\}$, $d_{\min} = \min\{AC, BD\}$, $AC = = 2p$ и $BC = 2q$. Из свойств хорд получаем, что $AO \cdot OC = p^2 = R_1^2 - r_1^2$, аналогично, $BO \cdot OD = q^2 = R_2^2 - r_2^2$. Пусть $O_1G = \rho_1$, $O_2G = \rho_2$. Очевидно, что $HG = \Delta$. Из прямоугольных треугольников O_1GE и O_2GE имеем $GE^2 = R_1^2 - \rho_1^2 = R_2^2 - \rho_2^2$, т.е. $R_2^2 - R_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2$, или $r_2^2 - r_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2$. Аналогично, из прямоугольных треугольников O_1OH и O_2OH получаем равенство $r_2^2 - r_1^2 = \left(\rho_2 - s_2\Delta\right)^2 - \left(\rho_1 - s_1\Delta\right)^2$, где s_1 равно 1 или −1, если точки O и O_1 лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от прямой EG, аналогично, s_2 равно 1 или −1, если точки O и O_2 лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от этой же прямой. Отсюда получим $\rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2 = \left(\rho_2 - s_2\Delta\right)^2 - \left(\rho_1 - s_1\Delta\right)^2$, а после приведения подобных членов $2\Delta\left(s_1\rho_1 - s_2\rho_2\right) = p^2 - q^2$. Понятно, что $\left|s_1\rho_1 - s_2\rho_2\right|$ – это расстояние между центрами окружностей. Получаем соотношение $8\rho\Delta = d_{\max}^2 - d_{\min}^2$. В нашей задаче $d_{\max} = 6$, $d_{\min} = 2$, $\Delta = 2$. Поэтому $\rho = 2$.

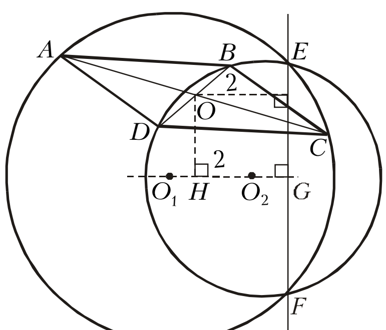

Рис. 11

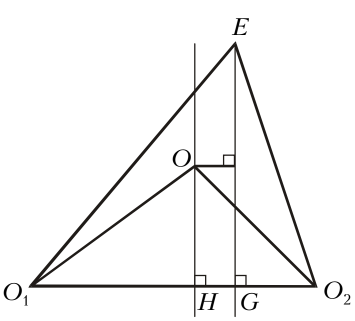

Рис. 12

Вариант 5

1. $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi n}{5}$, πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\log_3^2 5$.

3. $\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/4; +\infty\right)$. **4.** $\arccos\frac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

5. $(1; 5)$. **6.** $7/2$. **7.** $(0; 1/4)\cup(4; +\infty)$.

8. 4 : 3. *Указание.* Пусть O – центр окружности, K – точка пересечения AO и MN, H – середина BC. Из подобия треугольников AMK и AOM, APK и AOH и соотношения $AM^2 = AB \cdot AC$ получите, что $AP \cdot AH = AB \cdot AC$. Дальнейшее ясно.

Вариант 6

1. $\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\left(-1+\sqrt{57}\right)/4$.

3. $\left(1-\sqrt{2}; 2/3\right)\cup\left(1; 1+\sqrt{2}\right)$. **4.** 102%.

5. $\left[1; \log_3 6\right]$. **6.** $\left(b^2 - a^2\right)/b$.

7. $[1/2; 1]$. *Указание.* Данное неравенство имеет единственное решение $(x = 1)$ тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена $x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a$ не меньше 1.

8. $\sqrt{53}$. *Указание.* Пусть S – вершина конуса, SD – образующая конуса, содержащая точку C, E – точка пересечения прямой SA с плоскостью основания конуса (рис.13). Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную плоскости основания конуса. Имеем $OD \perp ED$, а точка B – точка пересечения прямых AC и ED в плоскости SED. Пользуясь условием и подобием треугольников, убедитесь, что $AD_1 = BD$. Найдите длины отрезков SD и BD, а затем и SB по теореме Пифагора.

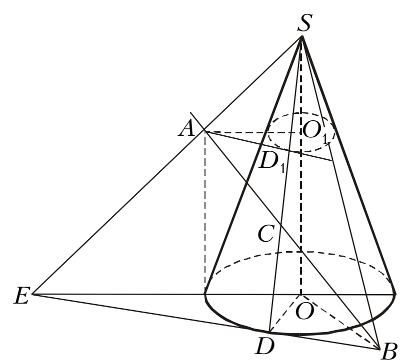

Рис. 13

Вариант 7

1. 1. **2.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 11.

4. 12π. *Указание.* Пусть r_n – радиус n-й окружности. Докажите, что r_n – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = (1+\sin\alpha)/(1-\sin\alpha)$, где α – половина данного угла. Из условия получите, что $\pi q^6 = 64\pi$, т.е. $q = 2$.

5. $\frac{1}{3}$. *Указание.* Пусть $k = DC_1/DC$, $S = S_{ADB} = S_{ADC} = S_{BDC}$. Выразите через S и k отношение боковых поверхностей пирамид $DA_1B_1C_1$ и $DABC$ и получите, что $k = 1$, т.е. точки C_1 и C совпадают. Отношение же объемов пирамид DCA_1B_1 и $DCAB$ равно отношению площадей треугольников DA_1B_1 и DAB.

6. ± 1. *Указание.* С помощью замены $y = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$ приводим уравнение к виду

$$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Поделив ($y \ne 0$) уравнение на y^2 и выполнив замену $t = y + \frac{1}{y}$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$