Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Для удержания щетки или палки нужно при их отклонении успевать двигать пальцем так, чтобы они вновь оказывались в положении равновесия. Щетка будет отклоняться медленнее, чем палка той же длины, так как центр тяжести щетки лежит выше центра тяжести палки.

2. В равновесии масса груза C в два раза больше массы груза B. При смещении точки A вправо равновесие нарушится – груз C будет опускаться, а груз B – подниматься.

3. Равновесие шарика устойчиво к малым возмущениям и неустойчиво к большим.

4. Если $h \ge l_0$, в точке O – устойчивое положение равновесия (ему соответствует минимум потенциальной энергии пружины). Если $h < l_0$, в точке O – неустойчивое положение равновесия (максимум потенциальной энергии пружины), но слева и справа на равных расстояниях от точки O имеются два устойчивых положения равновесия, соответствующих недеформированному состоянию пружины.

5. Хвост обеспечивает устойчивость змея относительно вращений около вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести.

6. При малейшем отклонении доски от вертикали момент выталкивающей силы относительно центра тяжести доски увеличивает отклонение доски, и она опрокидывается в устойчивое горизонтальное положение.

7. Да. Это достигается выбором формы сечения корабля, когда центр давлений смещается в сторону крена.

8. Шарообразная форма пузырьков отвечает минимуму энергии поверхностного натяжения жидкости.

9. Энергия поверхностного натяжения жидкого цилиндра больше, чем энергия капель, которые могут из него образоваться.

10. Поверхность одной большой капли меньше, чем суммарная поверхность нескольких маленьких капель с той же общей массой. Значит, и энергия поверхностного натяжения у большой капли меньше.

11. Система пар – жидкость находится в термодинамическом равновесии, т.е. температуры отдельных ее частей равны.

12. Да. Причем при движении вдоль прямой x, если $qQ < 0$, равновесие в точке O неустойчивое, если $qQ > 0$, равновесие устойчивое. При движении вдоль прямой y условия меняются местами.

13. Радиоактивные ядра нестабильны по своей природе и «обречены» на гибель уже в момент своего рождения.

14. Нет. Например при γ-распаде заряд ядра не меняется, поэтому не меняются и химические свойства вещества.

Микроопыт

После прокалывания пленки в петле оставшаяся часть мыльной пленки будет стремиться уменьшить свою поверхность, иначе говоря, дырка должна образовать фигуру максимальной площади. Такой фигурой будет круг.

Законы сохранения в задачах на столкновения

1. $\beta > M/(M - m_p) = 7/6$, где M – масса ядра лития, а m_p – масса протона.

2. $E_{\text{пор}} = 3E_{\text{и}}/4 = 10{,}2$ эВ. **3.** $\Delta\lambda = h/(mc) = 2{,}42\cdot 10^{-12}$ м.

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(3;\,4)\cup(4;\,7)$. *Указание.* Умножим левую и правую части на положительное при всех x выражение $\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$. После упрощений получим равносильную систему

$$2|x-4| < |x-1|,\ x \ne 5/2,\ x \ne 4,$$

решаемую стандартным образом.

2. $-\dfrac{3}{14}\sqrt[4]{51}$. *Указание.* Пусть a_1, a_2, …, a_7 – убывающая арифметическая прогрессия, $d < 0$ – ее разность, причем

$$a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_7^5 = 0.$$

Докажите, что $a_4 = 0$, $a_5 = -a_3 = d$, $a_6 = -a_2 = 2d$, $a_7 = -a_1 = 3d$.

3. $-23\pi/6$, $-19\pi/6$, $-11\pi/6$, $-4\arccos(-9/10)$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\right) = 0.$$

4. 20. Из условия задачи получаем (рис.4) $S_{CKL} : S_{DKL} = CL : LD = 1 : 5$. Поскольку $S_{BKLC} : S_{AKLD} = 1 : 5$, то

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AKD}} = \frac{S_{BKLC} - S_{CKL}}{S_{AKLD} - S_{DKL}} = \frac{1}{5}.$$

В треугольниках BKC и AKD высоты, опущенные из вершины K, равны. Поэтому $BC : AD = 1 : 5$. Из точек C и D опустим перпендикуляры CC' и DD' на прямую AB. Из подобия треугольников BCC' и ADD' имеем

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{5}.$$

С другой стороны, по теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла

$$\frac{C'K}{D'K} = \frac{CL}{LD} = \frac{1}{5}.$$

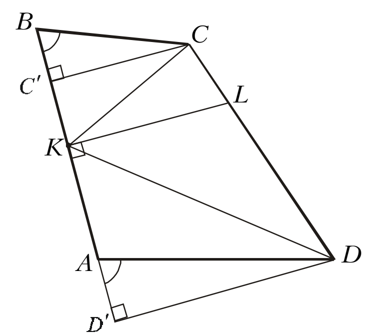

Рис. 4

Отсюда прямоугольные треугольники $CC'K$ и $DD'K$ подобны с коэффициентом $\dfrac{1}{5}$, и $DK = 5\,CK = 5\cdot 4 = 20$.

5. 1, $\dfrac{5}{2}$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно совокупности из двух уравнений

$$\left[\begin{array}{lr}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{a-x} = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{a} + \dfrac{8}{5}, & (1)\\[2ex] \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} = 4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2a-5} - 2. & (2)\end{array}\right.$$

Если число x_0 является решением уравнения (1), то число $a - x_0$ также является решением этого уравнения. Если оба решения – целые, то и a должно быть целым. С другой стороны, корни уравнения (2) тоже парные: x_1 и $a - \dfrac{1}{2} - x_1$, и их целочисленность приводит к условию $a - \dfrac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, требование задачи равносильно совокупности следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{все корни уравнения (1) – целые,}\\ a \in \boldsymbol{Z},\\ \text{уравнение (2) не имеет решений;}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\text{все корни уравнения (2) – целые,}\\ a - \dfrac{1}{2} \in \boldsymbol{Z},\\ \text{уравнение (1) не имеет решений.}\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (3)$$