Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}.$$

2. О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найдите седьмой член этой прогрессии.

3. Найдите все корни уравнения

$$\cos x\sin\frac{x}{4}+\frac{9}{10}\sin x+2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}+$$
$$+\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}-\frac{9}{20}=0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2}\pi;-\frac{3}{2}\pi\right]$.

4. Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K, пересекает сторону CD в точке L. Известно, что площадь четырехугольника $AKLD$ в пять раз больше площади четырехугольника $BKLC$, $CL=3$, $DL=15$, $KC=4$. Найдите длину отрезка KD.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{a-x}-\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{a}-\frac{8}{5}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3}-4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5}+2\right)=$$
$$=0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

6. Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $25/4$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и S_1 соответственно. Известно, что $PP_1=2$, $QQ_1=10$, $RR_1=6$. Найдите длину отрезка SS_1.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$2\sqrt{5\cdot 6^{x}-2\cdot 9^{x}-3\cdot 4^{x}}+3^{x}<2^{x+1}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 xy\cdot\log_{4x} y=2,\\ 8x-y=1.\end{cases}$$

3. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй – со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы

а) встретятся в пункте B,

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B,

если известно, что первый стартует из пункта A, а второй из пункта B?

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB=5$ и $AC=4$. Найдите длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

5. Найдите все a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x+(1-|a-2|)\sin 2x+$$
$$+(1-|2-a|)\cos x+(1-|a|)\sin x=0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi;\pi)$.

6. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найдите площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSC и CSD равны 5, 6 и 7 соответственно.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2000», апрель)

1. Решите неравенство

$$\left|\left|x^2-8x+2\right|-x^2\right|\ge 2x+2.$$

2. Решите уравнение

$$12^{x}+6^{x}-2\cdot 4^{x}-2\cdot 3^{x}-2^{x+1}+4=0.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6-10\cos x-\sin x}<\sin x-\cos x,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi;\pi]$.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD=\sqrt{13}$ и $\sin\angle ACD:\sin\angle BCD=4:3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB=120°$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Для каждого значения параметра a найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}y^2-3y\log_2\left(4x^2+(14a-10)x+\right.\\ \left.+8a-8\right)+2\log_4^2\left(4x^2+(6-2a)+\right.\\ \left.+4a^2-8a+4\right)^2=0,\\ 5y^2-8y\log_4\left(4x^2+(6-2a)x+\right.\\ \left.+4a^2-8a+4\right)^2+3\log_2^2\left(4x^2+\right.\\ \left.+(14a-10)x+8a-8\right)=0\end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB=15\sqrt{2}$, $BC=20$, а радиус окруж-