Комбинаторные доказательства

14. Пусть $2^n > (1+n)^m$. Докажем, что среди чисел 1, 2, 3, …, 2^n существует по крайней мере $m+1$ простое число.

Предположим, среди чисел 1, 2, 3,… …, 2^n содержится $s \le m$ простых чисел p_1, p_2, …, p_s. Тогда каждое число, не превосходящее 2^n, представимо в виде $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, где, очевидно, каждый показатель степени k_i не больше n. Однако (по правилу произведения) чисел такого вида $(1+n)^r$, что меньше 2^n. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Поскольку, как известно из анализа, показательная функция «растет быстрее» степенной, и для любого (сколь угодно большого) m при достаточно больших n неравенство $2^n > (1+n)^m$ имеет место, получено доказательство бесконечности множества простых чисел.

15. Докажем сначала, что среди чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ не менее четверти свободны от квадратов (т.е. не делятся на квадраты целых чисел).[4]

Среди чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеем не более n/p^2 чисел, делящихся на p^2. Поэтому количество чисел, делящихся на квадрат простого числа, не больше

$$\sum_{p \le \sqrt{n}} \frac{n}{p^2} < \frac{n}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)} = \frac{n}{4} + n \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{3n}{4}.$$

Пусть теперь p_k есть k-е простое число, $k \in \boldsymbol{N}$. Первые (по возрастанию) $k-1$ простых чисел порождают 2^{k-1} чисел, свободных от квадратов. Поэтому среди чисел от 1 до $4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$ содержится по меньшей мере k простых чисел (в противном случае доля чисел, свободных от квадратов, была бы менее четверти), т.е. $p_k \le 2^{k+1}$. Это не только доказывает теорему Евклида, но и дает оценку сверху (разумеется, довольно грубую) для k-го простого числа.

Гармонический ряд и трансцендентность числа π

16 (Эйлер). Для каждого простого числа p ряд

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots \qquad (9)$$

сходится, будучи геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{p} < 1$. Если простых чисел конечное множество $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, то, перемножив соответствующие им (положительные) сходящиеся ряды (9), вновь получим сходящийся ряд. В то же время его общий член имеет вид $\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}}$, где k_i – неотрицательные целые числа. В силу основной теоремы арифметики и сделанного предположения рассматриваемый ряд состоит из всех чисел вида $\frac{1}{n}$, т.е. является гармоническим рядом, который, как известно, не является сходящимся. Противоречие.

Итак, расходимость гармонического ряда доказывает бесконечность множества простых чисел! Не менее удивительным является факт, легший в основу следующего доказательства.

17. Для каждого простого числа p имеем

$$1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \ldots = \frac{p^2}{p^2 - 1}. \qquad (10)$$

Если простых чисел конечное множество $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, то, перемножив соответствующие им (положительные) сходящиеся ряды (10), вновь получим сходящийся ряд с суммой $S = \frac{p_1^2}{p_1^2 - 1} \cdot \frac{p_2^2}{p_2^2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^2}{p_s^2 - 1}$. Ясно, что S – рациональное число. Общий член ряда имеет вид $\frac{1}{p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \ldots p_s^{2k_s}}$, где k_i – неотрицательные целые числа. В силу основной теоремы арифметики и сделанного предположения рассматриваемый ряд состоит из всех чисел вида $\frac{1}{n^2}$. Сумма такого ряда, как известно, равна $\frac{\pi^2}{6}$. Для получения противоречия осталось убедиться в том, что число $\frac{\pi^2}{6}$ иррационально. Действительно, в противном случае число π, будучи корнем уравнения с рациональными коэффициентами $\frac{x^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = 0$, было бы числом алгебраическим, в то время как это не так (доказательство трансцендентности числа π можно найти в [4]).

Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ – число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Из определения следует, что если p – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$. Известно ([4]), что функция Эйлера *мультипликативна*, т.е. если числа n и m взаимно просты, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Докажем теперь теорему Евклида с помощью функции Эйлера.

18. Предполагая, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел p_1, p_2, …, p_s, рассмотрим их произведение $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$. Ни одно число, кроме 1, не может быть взаимно просто с P, откуда $\varphi(P) = 1$. С другой стороны, $\varphi(P) = \varphi(p_1 p_2 \ldots p_s) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_s - 1) > 1$. Противоречие.

Топологическое доказательство[5]

19 (Фюрстенберг, 1955). Введем на множестве целых чисел следующую топологию. Объявим *открытыми* множества, представимые в виде объединения бесконечных арифметических прогрессий. Проверка выполнения аксиом топологического пространства не сложна и предоставляется читателю.

Рассмотрим множество $A_p = \{tp | t \in \boldsymbol{Z}\}$. Оно не только открыто (будучи арифметической прогрессией с разностью p), но и *замкнуто*, так как дополнение к нему является объединением открытых множеств $A_{p,i} = \{tp + i | t \in \boldsymbol{Z}\}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Если простых чисел конечное множество, то объединение конечного числа замкнутых множеств $B = \bigcup_p A_p$ есть замкнутое множество. Любое число, отличное от 1 и −1, кратно некоторому простому числу и, значит, принадлежит множеству B. Стало быть, $B = Z \setminus \{-1, 1\}$. Поэтому $\{-1, 1\}$ есть открытое множество (будучи дополнением к замкнутому множеству B), что противоречит определению открытого множества.

Литература

[1] Литцман В. *Теорема Пифагора.* – М.: ГИФМЛ, 1960.

[2] Бухштаб А.А. *Теория чисел.* – М.: Просвещение, 1966.

[3] Виноградов И.М. *Основы теории чисел.* – М.: Наука, 1981.

[4] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* – М.: Изд-во МГУ, 1995.

[5] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Т.2. – М.: Наука, 1978.

[6] Трост Э. *Простые числа.* – М.: ГИФМЛ, 1959.

[7] http://www.utm.edu.research/primes.

---

[4] *Отметим, что известен (см., например, [2]) следующий факт: доля чисел, свободных от квадратов, в множестве* $\{1, 2, \ldots n\}$ *с ростом n стремится к* $\frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079\ldots$

[5] *Для «знатоков»!*