а) Пусть Гриша скажет: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты, которых у него нет}». После этого Леша должен сказать: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты Гриши, если второй из наборов, названных Гришей, не совпадает с его набором, и любые другие три карты, которых у него нет, в противном случае}». После этого каждый из них, очевидно, знает весь расклад. Коле же ничего не ясно. Действительно, названо три набора карт: A, B и C. Наборы B и C пересекаются по двум картам, Гриша сказал: «У меня либо A, либо B», Леша сказал: «У меня либо A, либо C». Это означает, что либо у Гриши набор A, а у Леши – C, либо у Гриши – B, а у Леши – A. Конечно, эти расклады различны, и даже закрытую карту определить нельзя.

б) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может все определить. Занумеруем карты числами от 0 до 6. Пусть Гриша и Леша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7. Тогда они узнают расклад: каждый из них должен лишь прибавить к своей сумме сумму другого и найти остаток, противоположный этой общей сумме по модулю 7 (т.е. такой, который при прибавлении к этой сумме дает число, делящееся на 7). Это и будет номер закрытой карты. После этого восстановление расклада не составляет труда. Проверим, что Коля ничего не узнал. Рассмотрим карту с номером s. Покажем, что она могла попасть к Грише, если он назвал сумму a. Для этого надо дополнить эту карту двумя другими с суммой номеров $a - s$. Легко видеть, что существует три различные пары номеров, дающие в сумме $a - s$. Из них две, возможно, испорчены тем, что туда входит карта с номером s или закрытая карта, но как минимум одна пара остается. Ею мы и дополним набор Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Леши.

А.Шаповалов

М1739. *Пусть А – произвольная четная цифра, Б – произвольная нечетная цифра. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 2^{2000}, каждая цифра которого – либо А, либо Б.*

Укажем способ составления из цифр $А$ и $Б$ числа, делящегося на 2^n для любого натурального n. Обозначим такое число G_n. При $n = 1$ полагаем $G_n = G_1 = А$.

Пусть построено число G_k при $n = k \geq 1$. Воспользуемся им при построении следующего числа G_{k+1}, делящегося на 2^{k+1}.

Если G_k делится на 2^{k+1}, то полагаем $G_{k+1} = G_k$, в противном случае построим вспомогательное число F_k, обладающее следующими свойствами: число F_k составлено из цифр $А$ и $Б$, делится на 2^k и имеет в своей десятичной записи ровно k цифр.

Если G_k имеет в своей записи ровно k цифр, то полагаем $F_k = G_k$.

Если в записи G_k более k цифр, положим F_k равным числу, получающемуся из G_k отбрасыванием старших цифр, начиная с $(k+1)$-й. По признаку делимости на 2^k, полученное из G_k после такой операции число F_k будет также делиться на 2^k.

Если в записи G_k менее k цифр, припишем к числу G_k слева его же несколько раз таким образом, чтобы в результате получилось число, в записи которого не менее k цифр. Это число делится на G_k и, следовательно, на 2^k. Если из него отбросить все старшие цифры, начиная с $(k + 1)$-й, то в результате получим число F_k, которое, по признаку делимости на 2^k, также делится на 2^k.

Если число F_k делится на 2^{k+1}, то полагаем $G_{k+1} = F_k$, в противном случае полагаем $G_{k+1} = \overline{БF_k}$, приписав к числу F_k число $Б$ слева. Положив $F_k = 2^k p$, где p – некоторое нечетное число, получаем $G_{k+1} = 10^k Б + 2^k p = 2^k\left(5^k Б + p\right)$. В скобках стоит четное число, поэтому G_{k+1} делится на 2^{k+1}.

И.Акулич, А.Жуков

М1740. *Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Докажите, что каждое из четырех чисел ab, bc, ca и ab + bc + ca является квадратом.*

Можно записать:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca, \qquad (*)$$

или иначе:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca).$$

Значит, число $ab + bc + ca$ является квадратом.

Равенство (*) можно истолковать как квадратное уравнение относительно c.

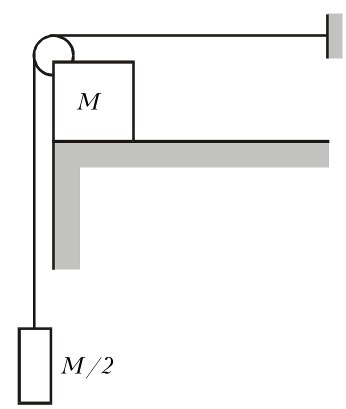
Поэтому

$$c = (a + b) \pm 2\sqrt{ab}.$$

Значит, число ab является квадратом. Точно так же убеждаемся, что числа bc и ca – тоже квадраты.

В.Произволов

Ф1748. *На краю гладкого горизонтального стола удерживают куб массой M = 2 кг (см. рисунок). Через небольшой гладкий выступ на ребре куба переброшена длинная легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой привязан груз массой M/2. Куб отпускают. Найдите его смещение за время τ = 0,2 с. Длина свисающего участка нити L = 2 м. Привязанный к стене кусок нити практически горизонтален.*



Заданный в условии интервал времени мал, это позволяет решить задачу без особых затруднений (иначе задачу просто нельзя будет решить, разве что приближенно).

Будем считать, что свисающий кусок нити с грузом на конце практически вертикален. Обозначим силу натяжения нити (с двух сторон невесомого блока силы натяжения одинаковы) буквой T. Ускорение груза, обозначим его величину буквой a, направлено вниз, а ускорение куба направлено вправо и по величине тоже равно a, поскольку сумма длин горизонтального и вертикального кусков нити неизменна. Запишем уравнения движения тел:

$$0{,}5Mg - T = 0{,}5Ma, \quad T = Ma.$$