щий) следует, что $\angle KAC = \angle FBC = \alpha$, $AC = AD = 2AF$. Пусть R − радиус окружности. Так как треугольник ABE вписан в окружность, то $R = AF/\sin 2\alpha$. Из подобия треугольников ABF и AKC имеем $AC/KC = AB/AF$, или $4AF^2 = BC\cdot CD$. Кроме того, $\sin\alpha = AF/BC$. Отсюда следует, что $CD = 16\sqrt{6}/25$.

5. $a > 0$, $a = -1/2$. *Указание.* Учитывая, что $x > 0$, $x \neq 1/2$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 1 - ax$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{2x}$ (рис.5).

6. $V = 3\sqrt{11}/28$, $S = 20\sqrt{3}/21$. *Решение.* Так как пирамида $ABCD$ − правильная, то

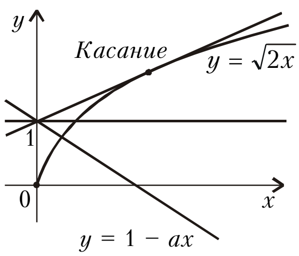

Рис. 5

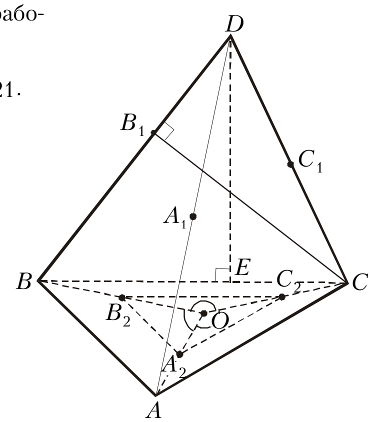

Рис. 6

$AB_1 \perp BD$, и угол между боковыми гранями $\alpha = \angle AB_1C = \arccos(1/10)$ (рис.6). Из треугольника AB_1C получаем

$$2AB_1^2(1-\cos\alpha) = AC^2, \text{ откуда } AB_1 = \sqrt{\frac{AC^2}{2-2\cos\alpha}} = 2\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$\sin\angle B_1BA = AB_1/AB = \sqrt{5}/3;$$

$$\cos\angle ADB = \cos(\pi - 2\angle B_1BA) = 1/9.$$

Обозначим $p = DA_1/DA$, $q = DB_1/DB$, $r = DC_1/DC = 1/2$. Пусть $\varphi = \angle BDE$, где DE − высота треугольника BCD; тогда $\sin\varphi = \sqrt{(1-\cos\angle ADB)/2} = 2/3$, $BD = BE/\sin\varphi = 9/2$. Треугольники BDE и BCB_1 подобны по двум углам, поэтому $BB_1 = (BE/BD)\cdot BC = 4$, $DB_1 = DB - BB_1 = 1/2$, $q = DB_1/DB = 1/9$.

По свойству биссектрисы $DA_1/AA_1 = BD/AB = 3/4$, откуда $p = DA_1/DA = 3/7$.

Пусть V_0 и V − объемы пирамид $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ соответственно. Так как площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = AB^2\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}$, радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = 2\sqrt{3}$, а высота пирамиды $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{33}/2$, то $V_0 = (1/3)S_{ABC}\cdot DO = 9\sqrt{11}/2$, $V = pqrV_0 = 3\sqrt{11}/28$.

Если A_2, B_2, C_2 − проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно на плоскость ABC, то по теореме Фалеса $OA_2 = pR$, $OB_2 = qR$, $OC_2 = rR$; $\angle A_2OB_2 = \angle B_2OC_2 = \angle C_2OA_2 = 2\pi/3$. Искомая площадь проекции

$$S = \frac{1}{2}\sin(2\pi/3)(OA_2\cdot OB_2 + OB_2\cdot OC_2 + OC_2\cdot OA_1) =$$

$$= R^2(\sqrt{3}/4)(pq+qr+rp) = 20\sqrt{3}/21.$$

Вариант 2

1. $[1;2)\cup(2+\sqrt{3};6]$. *Указание.* Неравенство равносильно системе неравенств

$$x^2 - 7x + 6 \le 0,$$

$$(x^2-6x+5)^2 - (x^2-2x-3)^2 < 0.$$

2. πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi/8 + \pi n/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

3. (2; 0), (43/4; 21/4). *Решение.* Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} [\log_2(x+y) - \log_2(x-2y)]\times \\ \times[\log_2(x+y) + 2\log_2(x-2y)] = 0, & (1) \\ (x+y)(x-2y) = 4. & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что либо

$$x + y = x - 2y, \qquad (3)$$

либо

$$(x+y)(x-2y)^2 = 1. \qquad (4)$$

Если

$$x+y > 0,\ x - 2y > 0, \qquad (5)$$

то система (1), (2) равносильна совокупности систем (2), (3) и (2), (4).

Первая из этих систем имеет единственное решение (2; 0), удовлетворяющее условию (5), а вторая, равносильная системе $x - 2y = 1/4$, $x + y = 16$, имеет решение (43/4; 21/4), которое также удовлетворяет (5).

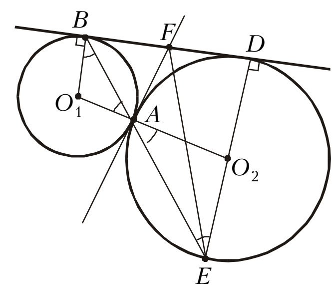

Рис. 7

4. $r_1 = 2\sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{5}/2$. *Решение.* $AF = BF = DF$ как касательные к окружности, проведенные из одной точки F. Пусть $AF = x$, $AB = y$, $AE = z$, $EF = d$; r_1 и r_2 − радиусы окружностей C_1 и C_2 (рис.7).

Углы BAO_1 и EAO_2 равны как вертикальные; треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные ($AO_1 = O_1B = r_1$, $AO_2 = O_2E = r_2$), поэтому $\angle O_1BA = \angle O_2AE = \angle O_1AB$. Так как накрест лежащие углы при прямых O_1B и O_2E равны, то эти прямые параллельны; следовательно, из условия $O_1B \perp BD$ вытекает, что $O_2E \perp BD$ и DE − диаметр C_2, $DE = 2r_2$.

Из трапеции O_1BDO_2 находим $BD = 2x = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Из подобия треугольников AO_1B и AO_2E следует, что $r_1/r_2 = y/z$. Из треугольника BDE получаем $(y+z)^2 = 4x^2 + 4r_2^2$. Из треугольника EFD имеем $d^2 = x^2 + 4r_2^2$. Подставляя в полученную систему $y = 4$, $d = = \sqrt{10}$, находим r_1 и r_2.

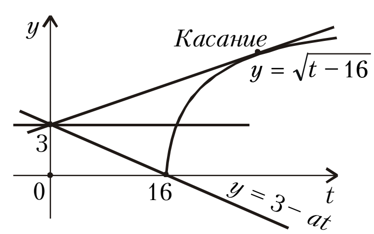

Рис. 8

5. $a \in [0; 3/16]$, $a = -1/16$. *Указание.* Сделав замену $t = x + 7$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 3 - at$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{t-16}$ (рис.8).

6. $DC_1/DC = 5/11$, $DA_1/DA = DB_1/DB = 5/6$, $S = 25\sqrt{23}/99$, $\rho = 7/8$. *Решение.* Пусть точки A_1, B_1, C_1 − точки пересечения плоскости $\mathcal{P}$ с лучами DA, DB, DC соответственно, $L = DK \cap A_1B_1$ (рис. 9).

Так как $A_1B_1 \perp CM$, а прямая KM − проекция CM на плоскость ABD (плоскости ABD и KDC перпендикулярны), то по теореме о трех перпендикулярах $A_1B_1 \perp KM$; с учетом того, что $AB \perp KM$, получаем $A_1B_1 \parallel AB$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ − равнобедренный ($A_1C_1 = B_1C_1$).