При такой высоте объем конуса и будет максимальным.

4. Пусть h и r – высота и радиус основания конуса, y и x – высота и радиус основания вписанного цилиндра. Тогда $\frac{x}{r}+\frac{y}{h}=1$ и объем цилиндра равен $V=\pi x^2y=\pi x^2h\left(1-\frac{x}{r}\right)$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2r-x^3$. Ее производная $f'(x)=2xr-3x^2$ обращается в ноль при $x=0$ или $x=\frac{2}{3}r$. Поскольку $f(0)=f(r)<f\left(\frac{2}{3}r\right)=\frac{4}{27}r^3$, то объем цилиндра максимален при $x=\frac{2}{3}r$ и равен при этом $V=\frac{4\pi}{27}r^2h$.

5. а) По теореме Пифагора, $a^2+b^2=4r^2$, где a, b – длины сторон прямоугольника. Величина ab^2 наибольшая тогда же, когда и величина $a^2b^4=\left(4r^2-b^2\right)b^4=\left(4r^2-x\right)x^2$, где обозначено $x=b^2$. При положительных x функция $f(x)=\left(4r^2-x\right)x^2$ принимает наибольшее значение при $x=\frac{8}{3}r^2$. При этом $b=r\sqrt{8/3}$ и $a=2r/\sqrt{3}$.

б) В обозначениях пункта а) имеем $b/a=\sqrt{2}$.

6. 4. **7.** $2V/9$. **8.** От 0 до $2S/27$. **9.** $\pi/\left(6\sqrt{3}\right)$.

11. Если $h\le 2$, то $h\ge a>h\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$; если $h\ge 2$, то $h\ge a>h\sqrt[3]{1-\frac{3h^2}{(h+1)^3}}$.

12. а) Объем равен $\frac{a^3n}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\frac{360°}{n}$ и принимает наибольшее значение при $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Высота пирамиды равна $h=b\sin\varphi$, а радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен $r=b\cos\varphi$, где φ – угол между боковой гранью и основанием пирамиды. Объем максимален, когда максимальна величина $hr^2=b^3\sin\varphi\cos^2\varphi$, т.е. когда $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $\varphi=2\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$. *Указание.* Радиус описанной окружности равен $\frac{a}{2\sin\varphi\cos(\varphi/2)}=\frac{a}{4\sin\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}$. Замена $x=\sin\frac{\varphi}{2}$ сводит задачу к определению наибольшего значения функции $x\left(1-x^2\right)$ при условии $0<x<1$.

14. а) $a/6$. б) Нужно найти максимум функции $y=x(a-2x)(b-2x)$, где $0<x<\min(a,b)/2$. Производная этой функции равна $y'=ab-4(a+b)x+12x^2$ и обращается в ноль при $x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. Поскольку $a^2-ab+b^2\ge\min(a,b)^2$, то вместо «±» следует брать знак «–».

15. а) $a=-p/3$; б) $p^2\ge 3q$; в) $p^2\le 3q$.

16. Обозначим буквами h, r, x, y высоту, радиус основания цилиндра и радиусы оснований усеченного конуса соответственно. Тогда

$$\pi r^2h=\pi\frac{x^2+xy+y^2}{3}h,\ \text{т.е. } 3r^2=x^2+xy+y^2.$$

По теореме Пифагора квадраты диаметров описанных шаров равны $4r^2+h^2$ и $(x+y)^2+h^2$, так что мы должны доказать неравенство $4r^2>x^2+2xy+y^2=3r^2+xy$, т.е. неравенство $r^2>xy$, которое равносильно неравенству $x^2+xy+y^2=3r^2>3xy$, т.е. $(x-y)^2>0$.

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

1. $a=F\lambda/\Delta x=0{,}6$ мм.

2. $L=\frac{a}{2\alpha(n-1)}=25$ м; $\Delta x=\frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}=6\cdot10^{-2}$ см; $N=\frac{a}{\Delta x}=42$.

3. $\Delta n/n=\lambda/L=5\cdot10^{-6}$.

4. $m=\frac{2h\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\lambda}=390$; $\Delta x=\frac{\lambda L\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{h\sin\varphi\cos^2\varphi}=2{,}8$ см.

Задачи о трапециях

1. 5; $\frac{5}{4}$. **2.** $\frac{2ab}{|a-b|}$. **3.** $\frac{1}{n+1}$. Построение, описанное в задаче, позволяет последовательно строить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т.д. часть исходного отрезка. **4.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** 6; 2. **6.** 10. *Указание.* Докажите, что сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна площади пятиугольника. **7.** $\frac{48}{5}$. *Указание.* Продлите луч BE до пересечения с прямой AD. **8.** 25. **9.** $90\sqrt{3}$. **10.** bd. *Указание.* Проведите через середину отрезка BC прямую, параллельную DE, до пересечения с прямыми BE и CD.
11. $\frac{(a-b)^3}{16(a+b)}$. **12.** 3 : 29. **13.** $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$. **14.** 10.
15. $\sqrt{ab}\left(a+b+c+\frac{ab}{c}\right)$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. (4; 2): (–4; –2). *Указание.* Перемножьте уравнения $\frac{x^4}{y^2}=72-xy$, $\frac{y^4}{x^2}=9-xy$ и введите переменную $t=xy$.

2. $\pi/4+\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$; $\pi k/10$, $k\in\mathbf{Z}$, k не кратно 5. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}=\frac{4\sin10x\sin8x}{\sin^2 2x}.$$

3. $(0;1/4)\cup(1/4;1]\cup(4;16)$. *Указание.* Сделайте замену $t=\log_2 x$.

4. $16\sqrt{6}/25$. *Решение.* Углы DBE и DAE равны, так как они опираются на одну дугу DE (рис.4), обозначим их через α, тогда и $\angle ABF=\alpha$. Из подобия треугольников AKC и FBC (оба – прямоугольные и угол C – об-

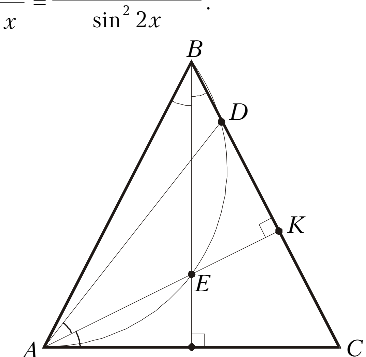

Рис. 4