Рис. 3

Обратим внимание, что по условию первыми «стреляли» бактерии, причем произвели они не менее *двух* «залпов». Так что рассмотренный сейчас момент (когда имеется $9M$ бактерий и $31M$ вирусов) вполне мог бы быть исходным. В этом случае общее количество микробов равно $9M + 31M = 40M$, а так как по условию это число равно 2000, то $M = 2000/40 = 50$. Таким образом, в данном случае в итоге борьбы осталось в живых 50 бактерий и 50 вирусов. Предположение, что этот обмен любезностями продолжался дольше, приводит к противоречию. Рассмотрев аналогично вторую возможность, когда последний удар нанесли вирусы, опять получаем противоречие с условием.

Итак, ответ: в результате разразившегося побоища в живых осталось по 50 бактерий и вирусов.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Слагаемых ШАХ меньше 10, иначе их сумма была бы четырехзначной. Запишем ребус в виде ШАХ × У = МАТ, где У – неизвестная отличная от 0 цифра, возможно совпадающая с одной из цифр, зашифрованных буквами Ш, А, Х, М, Т. Цифры Ш = 1, А = 3, Х = 4, М = 9, Т = 8 удовлетворяют ребусу: $134 \times 7 = 938$. Покажем, что значение У = 7 наибольшее.

Предположим, что У = 8 или У = 9. Поскольку в этом случае наименьшим трехзначным числом, представленным словом ШАХ, является число 123 (так как Ш = 1, А ≠ 0, Х ≠ 0), то значение У = 9 не подходит: $123 \times 9 = 1107$. Легко проверить, что в случае У = 8 и наименьшем значении А = 2 ребус 12Х × 8 = 92Т для букв Х и Т решений не имеет, в случае же А ≥ 3 произведение 1АХ × 8 получается четырехзначным. Итак, гроссмейстер объявил шах семь раз.

2. Пусть первая программа содержала K клипов. Тогда, по условию, вторая программа содержала $1{,}5K$ клипов, а Бивису понравились $K/5$ клипов первой программы и $(1{,}5K):2 = 3K/4$ клипов второй программы. По смыслу задачи все эти числа должны быть целыми, откуда следует, что K делится на 4 и на 5, т.е. на 20. Итак, $K = 20m$, где m – натуральное число. Тогда вторая программа содержала $1{,}5 \times 20m = 30m$ клипов, а третья программа – все остальные, т.е. $200 - 20m - 30m = 200 - 50m$ клипов. Это число должно быть положительным, в связи с чем $200 - 50m > 0$, откуда $m < 4$.

Далее, Бивису понравились всего $(20m/5) + (30m/2) = 19m$ клипов. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, причем в это число входили все клипы третьей программы. Поэтому $19m \geq 200 - 50m$, и $m \geq 200/69 > 2{,}8$.

Таким образом, $2{,}8 < m < 4$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этим условиям, это $m = 3$. Этот результат позволяет нам восстановить всю картину. Итак, первая программа содержала $20 \times 3 = 60$ клипов, вторая – $1{,}5 \times 60 = 90$ клипов, третья $200 - 60 - 90 = 50$ клипов. Бивису понравились $(60/5) + (90/2) = 57$ клипов, Батт-Хеду – столько же. Ну, а не понравилось каждому из них $200 - 57 = 143$ клипа.

3. Сомкнем выходящие из города дороги в еще один перекресток. Пусть N – общее количество перекрестков вместе с этим. Так как в каждом из перекрестков сходится по три дороги, то общее количество оконечностей дорог $3N$. Это число четное, поскольку каждая дорога в нашем случае имеет два конца. Следовательно, число N – четное, и в городе имеется нечетное количество перекрестков. Поскольку в каждом из них сходятся по одной дороге трех разных цветов, то для каждого цвета найдется дорога, не имеющая двух оконечностей в городе. Итак, все три выходящие из города дороги непременно имеют разные цвета.

4. Воспользуемся следующим очевидным утверждением. Имеется K карточек. Известно, что какие бы M из них ни взять, среди них окажется не менее N особых. В этом случае среди K карточек имеется не менее $K - M + N$ особых. Считая, что особые карточки – синие, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K - M + N$
100	80	20	40
40	10	2	32

Считая, что особые карточки – красные, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K - M + N$
100	50	30	80
80	20	10	70
70	5	3	68

Итак, в колоде находятся 32 синих и 68 красных карточек.

5. Нет, не удастся. Если бы существовало разбиение пятиугольного поля на параллелограммы, то можно было бы пройти от любого края поля к другому краю, двигаясь по цепочке параллелограммов. Поскольку в пятиугольнике не для каждой стороны существует параллельная ей сторона, то этого сделать нельзя.

Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские

1. Учитывая, что $AB = OA/\sin\alpha$, имеем

$$E = \frac{C}{OA^2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом, если лампу поместить в вершину конуса максимального объема, то окружность его основания получит наибольшую освещенность.

2. Обозначим $a = 4 - x$, тогда $b = 4 + x$ и $ab(b-a) = 2x(16 - x^2)$, причем $0 \leq x \leq 4$. Максимум достигается при $x = 4/\sqrt{3}$ и равен $256/(3\sqrt{3})$.

3. Обозначим буквой R радиус шара, а буквами r и h – радиус и высоту конуса. Тогда объем конуса равен $V = \pi r^2 h/3$. Продолжив высоту конуса до пересечения с шаром, получим отрезок длиной $2R - h$. Таким образом, через одну точку (центр основания конуса) проходят две хорды: одна из них состоит из отрезков длиной h и $2R - h$, а другая – из двух отрезков длиной r каждый. Значит, $r^2 = h(2R - h)$, так что $V = \pi h^2(2R - h)/3$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R - h) \leq \left(\frac{\frac{h}{2} + \frac{h}{2} + 2R - h}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}R^3,$$

где равенство достигается при $\frac{h}{2} = 2R - h$, т.е. при $h = \frac{4}{3}R$.