Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \dfrac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} = 16\operatorname{ctg} 2x \sin 10x + \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2 (x/2)\right| - 3} \le \frac{1}{\left|\log_8 x^3\right| - 2}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найдите длину отрезка CD, если $\angle ABC = 2\arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями $\arccos(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найдите

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{\left|x^2 - 6x + 5\right| - \left|x^2 - 2x - 3\right|} \le 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) = \\ = 2\log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найдите радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x - 9} = 3 - ax - 7a$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2\arcsin(1/3)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N – середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и в точке C имеет скорость v_0 (рис.1). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь s и поднявшись по вертикали на высоту H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Найдите скорость монеты в точке D.

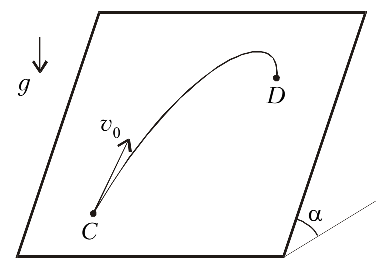

Рис. 1

2. В вертикально расположенной тонкой трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом столбик ртути длиной $L = 280$ мм запирает слой воздуха длиной L. Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Внешнее давление $p_0 = 770$ мм рт.ст.

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых на равных расстояниях d друг от друга (рис.2). Пластины *1* и *3* закорочены. Пластины *2* и *4* подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Определите силу, действующую со стороны электрического поля на пластину *3*. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

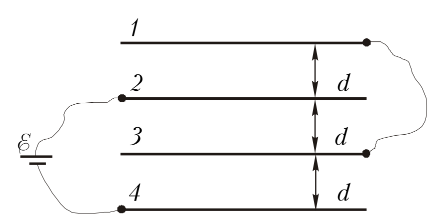

Рис. 2

4. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клинь-

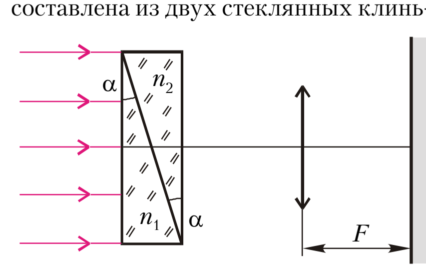

Рис. 3