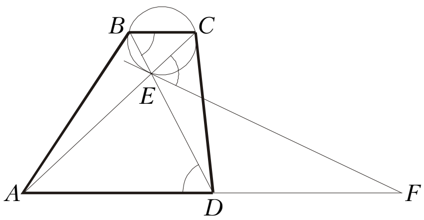

Рис. 11

углу CBE. С другой стороны, в трапеции $\angle CBD = \angle BDA$. Поэтому $\angle CEF = \angle BDA$, откуда $\angle AEF = \angle EDF$. Отсюда следует, что $\Delta FAE \sim \Delta FED$ (у них еще общий угол DFE). Тогда $\frac{EF}{FD} = \frac{AF}{EF}$, и $EF^2 = a(a-b)$. Окончательно, $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

Ответ: $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

В ряде задач окружность отсутствует в формулировке, но полезна при решении. Важно бывает увидеть саму возможность провести вспомогательную окружность, чтобы получить ключ к решению всей задачи. Эффективность метода вспомогательной окружности подтверждает следующая задача, где оказывается удобным провести сразу две вспомогательные окружности.

Задача 14 (МГУ, физический факультет, 1997 г.). *В трапеции ABCD* $BC \| AD$, $\angle ABC = 90°$. *Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что* $MC = a$, $NB = b$, *а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.*

Решение. В задаче присутствуют многочисленные перпендикуляры и прямые углы: $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, так как трапеция прямоугольная (рис.12); $MN \perp CD$; $DD_1 \perp MC$ и $DD_1 = c$; $AA_1 \perp BN$ и $AA_1 = x$ – искомая величина; $MC = a$, $NB = b$. Имеем: отрезок MC виден из точек B и N под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $BCNM$ можно описать окружность S_1. Диаметр ее известен – это отрезок $MC = a$. Из точек B и C окружности ее хорда MN видна под одним углом α (по следствию из теоремы о вписанном угле), т.е. $\angle MBN = \angle MCN = \alpha$.

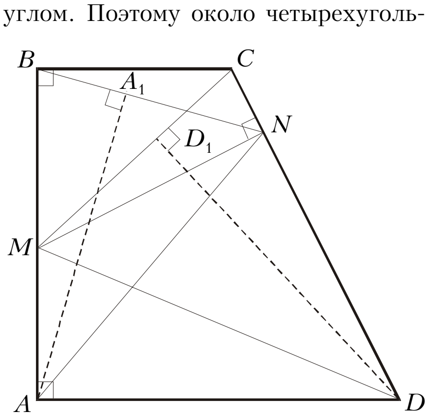

Рис. 12

Отрезок MD виден из точек N и A также под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $AMND$ тоже можно описать окружность. Диаметром ее является отрезок MD. Из точек A и D общая хорда двух окружностей (хорда MN) видна под одним углом β: $\angle MAN = \angle MDN = \beta$. В результате имеем два подобных треугольника BAN и CDM (по двум углам). Значит, $\frac{BN}{MC} = \frac{AA_1}{DD_1}$, откуда $AA_1 = x = \frac{BN \cdot DD_1}{MC} = \frac{bc}{a}$.

Ответ: $\frac{bc}{a}$.

Упражнения

1 (МГУ, факультет почвоведения, 1993 г.). Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определите длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

3. Точка K лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $AK = \frac{1}{n}AD$. Найдите отношение $AM : MD$, где M – точка пересечения с AD прямой, проходящей через точки пересечения прямых AB и CD и прямых BK и AC. Используя решение этой задачи, предложите способ деления данного отрезка на n равных частей ($n = 1, 2, 3, \ldots$) с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

4. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Известно, что $BO = PD$. Найдите отношение $AD : BC$.

5. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины 20° и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

6. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна 10. Найдите площадь пятиугольника.

7 (МГУ, биологический факультет, 1991 г.). Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны 8 и 6 соответственно. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

8 (МГУ, химический факультет, 1995 г.). Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

9 (МГУ, психологический факультет, 1990 г.). В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

10 (МГУ, физический факультет, 1996 г.). В трапеции $BCDE$ ($CD \| BE$) $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d. Найдите площадь трапеции.

11 (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b ($a > b$)?

12 (МГУ, мехмат, 1995 г.). На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

13 (МГУ, физический факультет, 1995 г.). Трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$) вписана в окружность. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите радиус окружности.

14. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Окружность касается основания трапеции AD в точке P, а боковых сторон AB и CD – в точках M и K соответственно, при этом $MK = 20$. Найдите длину отрезка, который высекают прямые PB и PC из отрезка MK.

15. В трапецию $ABCD$ вписана окружность которая касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции, если $AM = a$, $MB = b$, $CN = c$.