Задача 9. *На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям. При этом площадь трапеции $MBCN$ в k раз больше площади трапеции $AMND$. Найдите длину MN, если $BC = a$ и $AD = b$.*

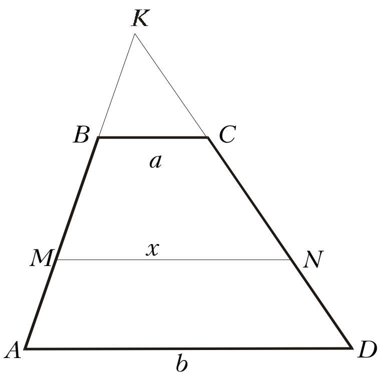

Рис. 10

Решение (см. рис. 10). Пусть длина отрезка $MN = x$ и пусть $a < b$. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке K. Получим три подобных треугольника KBC, KMN и KAD с основаниями a, x, b. Для площадей этих подобных треугольников имеем $S_{KBC} : S_{KMN} : S_{KAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{BCNM} = S_{KMN} - S_{KBC}$ и $S_{AMND} = S_{KAD} - S_{KMN}$, то $S_{BCNM} : S_{AMND} = \left(x^2 - a^2\right) : \left(b^2 - x^2\right)$. Из условия получаем, что $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = k$, откуда $x^2 = \frac{a^2 + kb^2}{1+k}$ и $x = \sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$. Тот же результат получается и при $a > b$. (При $k = 1$ получаем, что длина отрезка MN, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.)

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$.

При дополнительном построении 4), когда переносится диагональ, образуется треугольник, площадь которого равна площади трапеции. Это дополнительное построение оказывается ключевым, например, в следующей задаче.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1999 г.). *В трапеции $ABCD$ $(AB \| CD)$ диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.*

Решение. В трапеции даны диагонали. Чтобы заставить их «работать», сделаем стандартное построение – проведем $CC_1 \| DB$ (см. рис.7). Получим треугольник ACC_1, который равновелик трапеции. Действительно, треугольники ADC и CC_1B имеют одинаковое основание ($DC = BC_1$, так как DCC_1B – параллелограмм) и одинаковую высоту, равную высоте трапеции. Поэтому их площади равны, а значит, равны и площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACC_1. В треугольнике ACC_1 известны две стороны $AC = a$, $CC_1 = BD = \frac{7}{5}a$ и соотношение между углами. Действительно, если $\angle CC_1A = \angle DBA = \alpha$, то по условию $\angle CAC_1 = 2\alpha$, значит, $\angle ACC_1 = 180° - 3\alpha$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha}$. Откуда $2\cos\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{7}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{7}{10}$. Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (синус положителен, так как $\alpha \in \left(0; 180^\circ\right)$). Для угла ACC_1 имеем

$$\sin\angle ACC_1 = \sin\left(180^\circ - 3\alpha\right) = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}.$$

Осталось вычислить площадь:

$$S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CC_1\cdot\sin\angle ACC_1 = \frac{42\sqrt{51}a^2}{625}.$$

Ответ: $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$.

Трапеции и окружности

Если окружность описана около трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$, это означает, что трапеция – равнобочная (это следует из равенства вписанных углов CAD и ACB). При этом прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно основаниям, является осью симметрии трапеции, что обычно можно активно использовать при решении задач. При вычислениях часто удобно использовать теорему синусов, поскольку окружность, описанная около трапеции, описана и около четырех треугольников, вершины которых совпадают с вершинами трапеции. Иногда полезно (как в следующей задаче) связать возникающие вписанные углы с центральными.

Задача 11. *Трапеция $ABCD$ $(AD \| BC)$ вписана в окружность с центром O. Докажите, что точки A, B, O и точка M пересечения диагоналей трапеции лежат на одной окружности.*

Решение. Так как центральный угол AOB и вписанный угол ADB опираются на одну дугу, то $\angle AOB = 2\angle ADB$. Поскольку трапеция равнобочная, то $\angle MAD = \angle MDA$ и $\angle AMB = \angle MAD + \angle MDA = 2\angle ADB = \angle AOB$. Отсюда следует, что окружность, проходящая через A, B, O, проходит также и через M.

Если трапеция $ABCD$ описана около окружности, то у нее также имеется ряд хороших свойств: высота равна диаметру окружности; отрезки сторон от вершин до точек касания попарно равны; $AB + CD = AC + BD$ (как и в любом четырехугольнике, описанном около окружности). Другие интересные свойства содержатся в следующей задаче.

Задача 12. *Пусть трапеция $ABCD$ $(AD \| BC)$ описана около окружности с центром O. Докажите, что а) средняя линия трапеции равна полусумме ее боковых сторон; б) боковые стороны видны из центра O под прямым углом (т.е. $\angle AOB = \angle COD = 90°$); в) $AM \cdot MB = CN \cdot ND = r^2$, где M и N – точки касания окружности со сторонами AB и CD соответственно и r – радиус окружности.*

Решение. Утверждение а) следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований и $AB + CD = AC + BD$.

б) Точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Поэтому AO, BO, CO, DO – биссектрисы углов A, B, C, D. Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, то $\angle OAB + \angle OBA = 90°$ и $\angle AOB = 90°$. Аналогично, $\angle COD = 90°$.

в) Так как треугольник AOB – прямоугольный и OM – высота в нем, то $AM \cdot MB = OM^2 = r^2$ (по теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике). Аналогично, $CN \cdot ND = ON^2 = r^2$.

Если в задаче имеется трапеция и некоторая окружность, то часто бывает полезно использовать тот факт, что и в трапеции и в окружности возникают равные углы.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1994 г.). *В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.*

Решение (см. рис. 11). Угол CEF заключен между хордой EC и касательной EF. Как известно, он равен половине дуги EC, т.е. вписанному