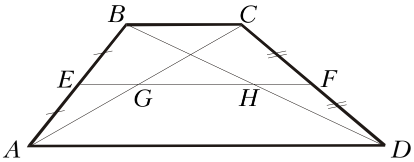

Рис. 6

в прямоугольном треугольнике MA_1D_1, которая, как известно, равна половине гипотенузы A_1D_1. Поскольку $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, то $A_1D_1 = AD - BC$ и $MN = \frac{A_1D_1}{2} = \frac{AD - BC}{2}$. С другой стороны, пусть EF – средняя линия трапеции (E на AB), и пусть она пересекает диагонали AC и BD в точках G и H (рис.6). Тогда EF параллельна основаниям и поэтому EH – средняя линия в треугольнике ABD, а EG – средняя линия в треугольнике ABC. Поэтому $GH = EH - EG = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$. В результате получаем $MN = GH = d$.

Ответ: d.

В тех случаях, когда заданы диагонали трапеции или угол между ними, бывает полезно дополнительное построение 4), порождающее треугольник, в котором 2 стороны равны и параллельны диагоналям трапеции, а длина третьей стороны равна сумме длин оснований трапеции.

Задача 6. *Постройте трапецию $ABCD$ ($DC \| AB$) по двум ее основаниям $DC = a$, $AB = b$ ($a < b$) и двум диагоналям $AC = d_1$, $BD = d_2$.*

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

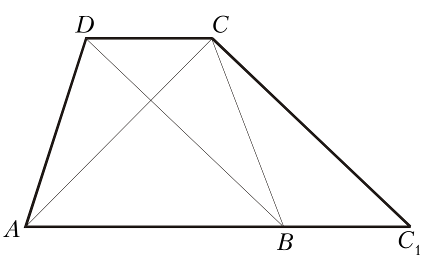

Рис. 7

$CC_1 \| DB$ (рис.7). Получим треугольник ACC_1 с известными сторонами $AC = d_1$, $CC_1 = d_2$, $AC_1 = a + b$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ACC_1, на AC_1 отложить отрезок $AB = b$, через точку C провести прямую, параллельную AB, и отложить на ней отрезок $DC = a$ (в нужную сторону).

Указанное дополнительное построение заставляет «работать» обе диагонали, соединив их вместе в треугольнике ACC_1.

Дополнительное построение 5) позволяет сводить задачу о трапеции к задаче о треугольниках.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1999 г.). *В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.*

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

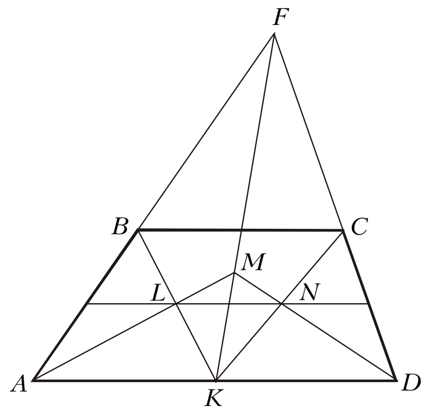

Рис. 8

Решение (см. рис. 8). Так как сумма углов трапеции при боковой стороне AB равна 180° и AM и BK – биссектрисы этих углов, то $\angle LAB + \angle LBA = 90°$. Таким образом, в треугольнике ABK биссектриса AL является высотой. Поэтому $AK = KB = 9$. Аналогично, $KD = CD = 5$. При этом $BL = LK$, $CN = NK$, поэтому LN – средняя линия в треугольнике KBC, а ее продолжение – средняя линия в треугольнике ABK. Значит, LN делит AB в отношении 1 : 1. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке F. Тогда M – точка пересечения биссектрис в треугольнике AFD и FM – третья биссектриса в этом треугольнике. Пусть продолжение FM пересекает AD в точке K_1. Тогда по теореме о биссектрисе $\frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{5}$. Отсюда следует, что K_1 совпадает с K, т.е. FK проходит через M. При этом легко получить, что прямая MK (или FK) делит сторону BC в том же отношении, что и сторону AD, т.е. 9 : 5. Так как $\angle KLM = \angle KNM = 90°$, то точки K, L, M, N лежат на одной окружности (с диаметром MK). Тогда $\angle MKN = \angle MLN$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Но $LN \| BC$, поэтому $\angle MLN = \angle MAK$. Таким образом, $\angle MKN = \angle MAK$ и $\Delta NKM \sim \Delta LAK$ (так как $\angle MNK = \angle ALK = 90°$). Аналогично, $\Delta LKM \sim \Delta NDK$. Поэтому $\frac{MK}{AK} = \frac{MN}{LK}$ и $\frac{MK}{KD} = \frac{ML}{KN} = \frac{3}{7}$. Отсюда $MK = \frac{3}{7}KD = \frac{15}{7}$ и $\frac{MN}{LK} = \frac{15}{7} : 9 = \frac{5}{21}$.

Ответ: а) 1 : 1, 9 : 5; б) 5 : 21.

Трапеции и площадь

Наличие параллельных сторон в трапеции порождает ряд интересных свойств, связанных с площадями.

Задача 8. *Диагонали трапеции рассекают ее на 4 треугольника. а) Докажите, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам, имеют равную площадь. б) Пусть площади треугольников, примыкающих к основаниям, равным S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.*

Решение (см. рис. 9). а) Так как $BC \| AD$, то высоты в треугольниках ABD и ACD, опущенные на их общее

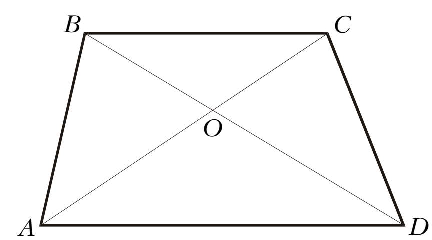

Рис. 9

основание AD, равны. Поэтому равны площади треугольников ABD и ACD. Так как эти треугольники имеют общую часть AOD, то равны также площади треугольников ABO и CDO.

б) Пусть площади треугольников ABO и CDO равны S_3 и S_4. Тогда $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ (докажите, что это равенство справедливо в любом выпуклом четырехугольнике, воспользовавшись тем, что $\sin\angle AOB = \sin\angle BOC = \sin\angle COD = \sin\angle DOA$). В п. а) мы доказали, что $S_3 = S_4$. Поэтому $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1S_2}$. Отсюда площадь трапеции равна $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Имеется ряд важных связей площади с дополнительными построениями в трапеции. Так, например, при продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.