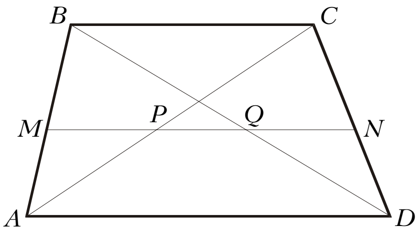


Рис. 1

1). Так как $MN \| BC$, то $\Delta AMP \sim \Delta ABC$, $\Delta DQN \sim \Delta DBC$ и $AM : AB = DN : DC$. Поэтому $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC}$. Отсюда $MP = QN$.

**Задача 2.** *В трапеции ABCD с основаниями AD = a и BC = b через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Эта прямая пересекает боковые стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.*

**Решение** (см. рис.2). Так же, как в задаче 1, получаем, что $MO = ON$. Так как $BC \| AD$, то $\Delta OBC \sim \Delta ODA$ (из

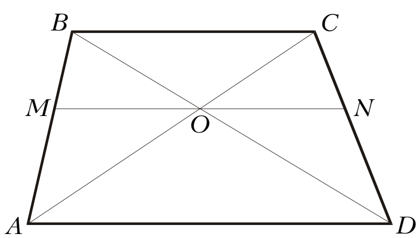


Рис. 2

равенства углов). Отсюда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}$ и $\frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$. Так как $MN \| AD$, то $\Delta BMO \sim \Delta BAD$. Поэтому $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$ и $MO = \frac{b}{a+b} AD = \frac{ab}{a+b}$. Поскольку $MO = ON$, то $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

**Ответ:** $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Следующая задача выражает очень важное утверждение о трапециях.

**Задача 3.** *Докажите, что середины оснований, точка O пересечения диагоналей и точка F пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.*

**Решение.** Пусть прямая $FO$ пересекает основания трапеции в точках $M$ и $N$ (рис.3). Так как $\Delta FBM \sim \Delta FAN$, $\Delta FMC \sim \Delta FND$, $\Delta OBM \sim \Delta ODN$, $\Delta OMC \sim \Delta ONA$, то $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN} =$

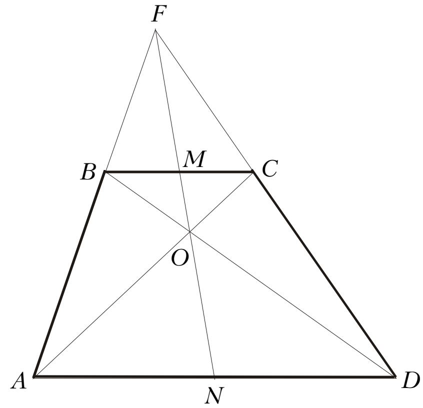


Рис. 3

$= \frac{MC}{ND}$ и $\frac{BM}{ND} = \frac{MO}{ON} = \frac{MC}{AN}$. Отсюда $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ и $\frac{BM}{MC} = \frac{ND}{AN}$. Тогда $\frac{AN}{ND} = \frac{ND}{AN}$, и $AN = ND$. Но тогда и $BM = MC$.

## Дополнительные построения в трапециях

Обычно трудности у школьников вызывает выбор тех дополнительных построений, которые помогают решить задачу. Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений. Отметим те, которые наиболее часто используются при решении задач: 1) опускание высот из концов одного основания на другое основание; 2) проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину; 3) проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам; 4) проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину; 5) продолжение боковых сторон до пересечения.

Дополнительное построение 1) позволяет разбить трапецию на прямоугольник (стороны которого – одно из оснований и высота трапеции) и 2 прямоугольных треугольника (в которых один из катетов – высота трапеции, а гипотенузы – боковые стороны трапеции). Это часто позволяет произвести нужные вычисления.

Дополнительное построение 2) порождает параллелограмм и треугольник. Это достроение полезно, когда в образовавшемся треугольнике удается получить 3 параметра.

**Задача 4.** *Постройте трапецию ABCD ( $BC \| AD$ ) по четырем сторонам AB = c, AD = b, BC = a, CD = d (a < b) и найдите ее высоту.*

**Решение.** Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

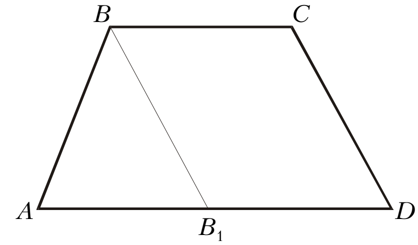


Рис. 4

$BB_1 \| CD$ (рис.4). Получим треугольник $ABB_1$ с известными сторонами $AB = c$, $BB_1 = CD = d$, $AB_1 = b - a$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник $ABB_1$, на луче $AB_1$ отложить отрезок $AD = b$, через точку $B$ провести прямую, параллельную $AD$, и отложить на ней отрезок $BC = a$ (в нужную сторону). Высота $h$ трапеции находится, например, из формулы $S = \frac{h(b-a)}{2}$ для площади треугольника $ABB_1$, где площадь треугольника предварительно вычисляется по формуле Герона.

**Ответ:**

$$h = \frac{2}{b-a}\sqrt{p(p-c)(p-d)(p-b+a)},$$

где $p = \frac{1}{2}(c+d+b-a)$.

Указанное построение заставляет «работать» боковые стороны, соединив их вместе в треугольнике $ABB_1$. Дополнительное построение 3) очень близко к 2) и порождает такой же треугольник.

**Задача 5.** *В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна d.*

**Решение.** Пусть в данной трапеции основания $AD$ и $BC$ $(AD > BC)$ и пусть

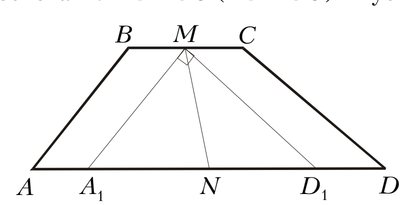


Рис. 5

$M$ – середина стороны $BC$, $N$ – середина стороны $AD$. Требуется найти длину $MN$ (рис.5). Проведем из точки $M$ прямые параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием $AD$ в точках $A_1$ и $D_1$. Тогда сумма углов $MA_1D_1$ и $MD_1A_1$ равна 90°, т.е. треугольник $MA_1D_1$ является прямоугольным. Имеем $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, поэтому $AA_1 = D_1D$ и $A_1N = ND_1$. Таким образом, $MN$ – медиана