

Рис. 5

является неравенство

$$S_{ACD} + S_{BCD} > S_{ABC} + S_{ABD}.$$

Можно доказать, что это условие не только необходимо, но и достаточное. В частности, если сумма площадей никаких двух граней тетраэдра не равна сумме площадей двух других граней, то существуют $1 + 4 + 3 = 8$ сфер, каждая из которых касается всех четырех плоскостей граней тетраэдра. А для равногранного тетраэдра таких сфер всего $1 + 3 = 4$.

Как расположить на сфере n точек, чтобы наименьшее из всех расстояний между ними было как можно больше? Эта задача не решена до сих пор. Оптимальные расположения при $n = 2, 3, \dots, 9$ показаны на рисунке 6, где линиями соединены те точки, расстояния между которыми равны наименьшему из расстояний между рассматриваемыми n точками. При $n > 9$ решение известно для $n = 12$ (вершины икосаэдра) и $n = 24$ (вершины полуправильного 38-гранника, ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами; в каждой вершине сходятся 4 треугольника и 1 квадрат).

Другая похожая задача — как расположить на непроводящей электричество сфере n одинаковых зарядов. Отталкиваясь, они стараются «разбежаться» в разные стороны», чтобы минимизировать потенциальную энергию системы. При $n = 2, 3, 4, 6$ и 12 ответы найдены: это, соответственно, 2 противоположные точки сферы, 3 вершины вписанного в боль-

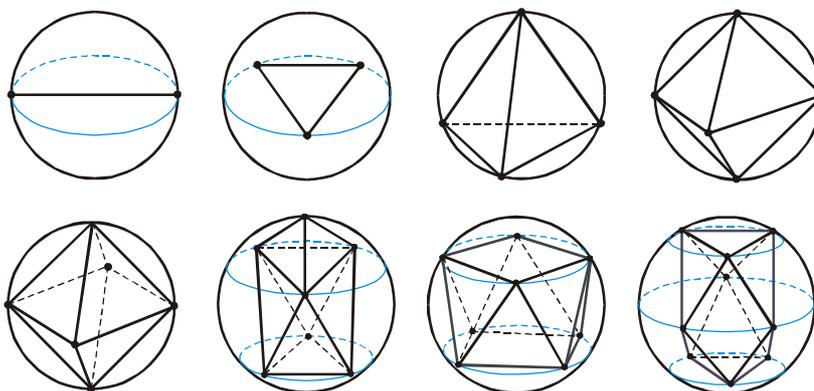


Рис. 6

шой круг сферы равностороннего треугольника, 4 вершины правильного тетраэдра, 6 вершин октаэдра и 12 вершин икосаэдра. В общем случае решение неизвестно.

Рассмотрим куб размером $3 \times 3 \times 3$. Отметим центры всех 12 единичных кубиков, которые выходят на поверхность куба двумя своими гранями (т.е. не являются ни угловыми, ни центральными на гранях). Поскольку все эти

Рис. 7

12 точек удалены от центра куба на расстояние $\sqrt{2}$, то сферы радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в них касаются центрального шара (рис.7).

Можно ли расположить 13 одинаковых шаров, чтобы все они касались одного шара того же радиуса? Джеймс Грегори (1638–1675) надеялся, что можно. Исаак Ньютон (1643–1727) утверждал, что нельзя. Точку в их споре поставили в 1953 году К.Шютте и Б.Л.Ван-дер-Варден. Прав оказался Ньютон.

Возьмем все точки пространства с целыми координатами и отметим те из них, сумма координат которых четна (рис.8). Рассмотрим шары радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в отмеченных точках. Доля объема, которую занимают эти шары, равна $\pi/\sqrt{18} \approx 0,7405$. Иоганн Кеплер в 1611 году выдвинул гипотезу, что это — наиболее плотная возможная упаковка шаров. Задача о плотной упаковке шаров вошла (под номером 18) и в список наиболее важных проблем математики XX века, составленный в 1900 году Давидом Гильбертом. В 1998 году вышла серия из шести статей Хайеса и Фергюсона, где при помощи весьма сложных рассуждений задача сведена к рассмотрению примерно 5000

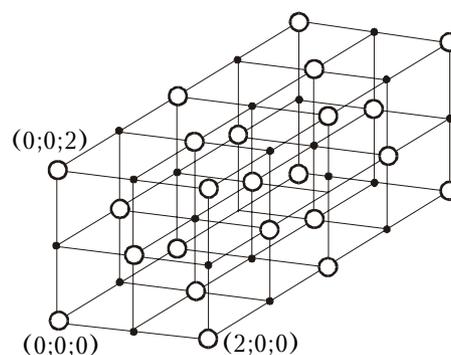


Рис. 8

конфигураций, которое было выполнено на компьютере. Окончательную проверку эти вычисления и рассуждения еще не прошли, и можно ожидать всяких сюрпризов.

А. Жуков, А. Спивак